张宇 一高数18讲

1.5. 求极限 $\lim_{n\to\infty} n^2(\sqrt[n]{a}-\sqrt[n+1]{a})\ (a>0)$.

解：由拉氏中值定理：$\exists \xi\in[n,n+1]$ $(a^{\frac{1}{\xi}})'=\frac{a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}}{n-(n+1)}$

$\Rightarrow a^{\frac{1}{n}}-a^{\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{\xi^2}\cdot a^{\frac{1}{\xi}}\cdot \ln a$.

$\therefore I=\lim_{n\to\infty} n^2\cdot\frac{1}{\xi^2}\cdot a^{\frac{1}{\xi}}\cdot\ln a=\begin{cases}0\cdot\cancel{\ } , & a\geq 1\\ -\infty, & 0<a<1\end{cases}$

$x\to 0$ 时的无穷小阶数.

1.7 ② $x-\ln(1+\tan x)=x-(\tan x-\frac{1}{2}\tan^2 x)$

$=x-\left[(x-\frac{1}{3}x^3)-\frac{1}{2}(x-\frac{1}{3}x^3)^2\right]$

$\sim \frac{1}{2}x^2$.

③ $e^{3x^2}-\cos 2x=(e^{3x^2}-1)-[\cos 2x-1]=3x^2+2\sin^2 x$ ~~ln~~ $5x^2$

④ $\int_0^{\arcsin x}\frac{1-\cos t^2}{t}dt \rightarrow$ ① ~~arctanx~~ $\arcsin x\sim x$

② $\frac{1-\cos t^2}{t}\sim\frac{\frac{1}{2}t^4}{t}\sim\frac{1}{2}t^3$，积分后 $\Rightarrow t^4$

③ $1\times 4=4$.

2.5 (1) 证明对 $\forall n\in N_+$，有 $\frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$ 成立.

(2) 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$，$(n=1,2,\cdots)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛.

证明：(1) 对 $y=\ln(x)$ 用拉氏中值定理，$\exists\xi\in(n,n+1)$，~~使 $\frac{1}{1+\xi}=$~~

使 $\frac{1}{\xi}=\ln(n+1)-\ln(n)=\ln(1+\frac{1}{n})$

$\because \frac{1}{\xi}\in(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$.

$\therefore \frac{1}{n+1}<\ln(1+\frac{1}{n})<\frac{1}{n}$

(2) $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{n+1}+\ln\frac{n}{n+1}=\frac{1}{n+1}+\ln(1-\frac{1}{n+1})$

$=\frac{1}{n+1}+\left[-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}(-\frac{1}{n+1})^2\right]<0$.

$\therefore\{a_n\}\downarrow$

又 $\because a_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n>\ln(1+1)+\ln(1+\frac{1}{2})+\ln(1+\frac{1}{3})+\cdots+\ln(1+\frac{1}{n})-\ln n$

$=\ln\frac{n+1}{n}=\ln(1+\frac{1}{n})>0$.

$\therefore\{a_n\}$ 收敛.

2.6 (1) 证明方程 $e^x+x^{2n+1}=0$ 在 $(-1,0)$ 内有唯一实根 x_n，$n=1,2,3,\cdots$ 略. $f(x)=e^x+x^{2n+1}\uparrow$

(2) 证明 $\lim_{n\to\infty}x_n$ 存在并求其值 a.

(3) 求 $\lim(x_n-a)n$

证明：(2) 已知 $x_n\in(-1,0)$.

$e^{x_{n+1}}+x_{n+1}^{2n+3}=e^{x_{n+1}}+x_{n+1}^{2n+1}\cdot x_{n+1}^2<e^{x_{n+1}}+x_{n+1}^{2n+1}=e^{x_n}+x_n^{2n+1}$

$n+1$ 时 为 0；$(0,1)$；都为 0.

$\Rightarrow\{x_{n+1}\}\downarrow\Rightarrow$ 有界. $\Rightarrow\ln(-a)=0$.

$e^{x_n}+x_n^{2n+1}=0$

~~$a=-e$~~

$e^{x_n}=-x_n^{2n+1}$

$a=-1$

$x_n=(2n+1)\ln(-x_n)$

$n\to\infty$. $a=(2n+1)\ln(-a)$

(3) $x_n=-e^{\frac{x_n}{2n+1}}$

$\therefore\lim_{n\to\infty}n(x_n-a)$

$=\lim_{n\to\infty}n(1-e^{\frac{x_n}{2n+1}})$

$=\lim_{n\to\infty}n(-\frac{x_n}{2n+1})$

$=\lim_{n\to\infty}-\frac{1}{2}x_n$

$=\frac{1}{2}$

2.7 求 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}$，$(x\geq 0)$ 的表达式

显然，$\max\{1, x, \frac{x^2}{2}\}=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ x, & 1\leq x<2\\ \frac{x^2}{2}, & x\geq 2.\end{cases}$

由夹逼定理，易知 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x<1\\ x, & 1\leq x<2\\ \frac{x^2}{2}, & x\geq 2\end{cases}$

对和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ 放缩，有两种经典方法。

① $n\to+\infty$，则 $n\cdot u_{min}\leq\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\leq n\cdot u_{max}$

② n 有限，则 $1\cdot u_{max}\leq\sum\limits_{i=1}^{n}u_i\leq n\cdot u_{max}$ $(u_i>0)$

原则：谁在和式中起决定作用

①中每个 u_i 都是无穷小、②中并非每个 u_i 都无穷小。

3.3 设 $f''(1)$ 存在，且 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$，求 $\varphi(x)$ 在 $x=1$ 的某个邻域内的导数，并讨论 $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处的连续性。

解：由 $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$ 易知 $f(1)=0$，$f'(1)=0$.

修正 $\varphi(x)=\int_0^{x-1}f'(1+u)\frac{1}{x-1}du=\frac{1}{x-1}f(1+u)\Big|_0^{x-1}=\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}$.

由定义知 $\varphi'(1)=\lim\limits_{x\to1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}$

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}$ $(\varphi(1)=0)$.

$=\lim\limits_{x\to1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}$ (洛必达)

$=\frac{1}{2}f''(1)$ (洛必达)

$\varphi'(x)=\frac{f'(x)}{x-1}-\frac{f(x)}{(x-1)^2}$

$\lim\limits_{x\to1}\varphi'(x)=f''(1)-\frac{1}{2}f''(1)=\frac{1}{2}f''(1)$ —— 可导一定连续

$\therefore$ $\varphi'(x)$ 在 $x=1$ 处连续.

3.9 设 $f(x)$ 在 x_0 处二阶可导，且 $f'(x_0)<0$，$f''(x_0)<0$，$\Delta x>0$，记

$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，$dy=f'(x_0)\Delta x$.

则 dy 与 Δy 大小关系为 $\Delta y\leq dy<0$

$f(x)$ 在 x_0 处二阶泰勒展开，$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x+\frac{1}{2}f''(x_0)\cdot\Delta x^2+o(x^2)$.

$\Rightarrow\underbrace{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}_{\Delta y}=\underbrace{f'(x_0)\Delta x}_{dy}+\frac{1}{2}f''(x_0)\Delta x^2+o(x^2)$.

4.5 设 $y=(\arcsin x)^2$，证明：

$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)y^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ 并求 $y(0)$, $y'(0)$, …, $y^{(n)}(0)$.

解：[分析] 观察易知上式类似莱布尼茨公式应用，但阶次高了2.

$y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$y'\cdot\sqrt{1-x^2}=2\arcsin x$

$y''\sqrt{1-x^2}-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}}\cdot y'=2\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [求了2次导后用莱尼公式就有了 $n+2$ 阶]

$\Rightarrow(1-x^2)y''=xy'+2$

两边对 x 求 n 阶导数，即有：

$(1-x^2)y^{(n+2)}+n\cdot(-2x)y^{(n+1)}+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)\cdot y^{(n)}+0=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}+0$

$\Rightarrow$ 即 $(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=xy^{(n+1)}$

$(1-x^2)y^{(n+2)}-(2n+1)xy^{(n+1)}-n^2y^{(n)}=0$ 得证.

$y(0)=0$

$y''(0)=2$

将 $x=0$ 代入结论，

得 $y^{(n+2)}=n^2y^{(n)}$

$\therefore$ $y^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & 奇\\ \cdots, & 偶\end{cases}$

5.7 设f(x)在[a,b]上连续，证明：函数 $F(x)=\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)dt$ 与f(x)在(a,b]上具有相同的单调性。

证明：$F'(x)=-\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)dt+\frac{1}{x-a}f(x)$

$=\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x[f(x)-f(t)]dt$ ☆ 即为前式确定正负，后式可比大小

1° 若f(x)在[a,b]↑，则 $a\le t<x<b$ 时，$f(t)<f(x)$，$F'(x)>0$，F(x)↑。

2° 若f(x)在[a,b]↓，则 $a\le t<x<b$ 时，$f(t)>f(x)$，$F'(x)<0$，F(x)↓

例6.3 已知f(x)二阶可导，且f(x)>0，$f(x)f''(x)-[f'(x)]^2\ge0$ $(x\in R)$

$f(x)f''(x)-f'^2(x)=\left[\frac{f'(x)}{f(x)}\right]'=[\ln f(x)]''$

[确定辅助函数] 二求导公式的逆用

$f>0$

(1) 证明 $f(x_1)f(x_2)\ge\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2$ $(x\in R)$

(2) 若f(0)=1，证明 $f(x)\ge e^{f'(0)x}$ $(x\in R)$ $\xrightarrow{f(x)>0}$ $\ln f(x)\ge f'(0)x$

解：(1) 令 $g(x)=\ln f(x)$，则 $g'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}$，$g''(x)=\frac{f''(x)f(x)-[f'(x)]^2}{f^2(x)}\ge0$

故 $\frac{1}{2}(g(x_1)+g(x_2))\ge g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\Rightarrow f(x_1)f(x_2)\ge\left[f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right]^2$

(2) 由泰勒中值定理，∃ξ使 $g(x)=g(0)+g'(0)x+\frac{1}{2}g''(\xi)x^2$

$=\ln f(0)+\frac{f'(0)}{f(0)}\cdot x+\underbrace{\frac{f''(\xi)f(\xi)-f'^2(\xi)}{2[f(\xi)]^2}\cdot x^2}_{\ge0}$

$\Rightarrow g(x)\ge 0+f'(0)x$

$\Rightarrow f(x)\ge e^{f'(0)x}$

6.4 设f(x)在[a,b]上连续，在(a,b)内可导，且f(x)为非线性函数，证明：存在ξ∈(a,b)，使 $|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$

证明：令 $F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$

则F(x)在[a,b]连续，且在(a,b)可导，且 $F(a)=F(b)=0$

∵f(x)非线性，

∴ $F(x)\not\equiv0$

∃c∈(a,b)，使 $F(c)\neq0$，不妨设 $F(c)>0$，对(a,c)，(c,b)上的F(x)分别应用拉氏中值

$F'(\xi_1)=\frac{F(c)-F(a)}{c-a}>0$，$\xi_1\in(a,c)$

$F'(\xi_2)=\frac{F(b)-F(c)}{b-c}<0$，$\xi_2\in(c,b)$

∵ $F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

∴ $f'(\xi_1)>\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$f'(\xi_2)<\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

当 $|f'(\xi)|=\max\{|f'(\xi_1)|,|f'(\xi_2)|\}$ 时，有 $|f'(\xi)|>\left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|$，ξ∈(a,b)

6.5 设函数f(x)在[a,b]上有连续的二阶导数，证明：存在ξ∈(a,b)，使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi)$$

[分析] 易知结论与泰勒公式相近，令 $x_0=\frac{a+b}{2}$，$h=\frac{a-b}{2}$　$F(x)=\int_a^x f(x)dx$

$F(x_0+h)=\cdots$ ①，$F(x_0-h)=\cdots$ ②

①−②：$\int_a^b f(x)dx=\cdots$

再证得结论.(平均值定理)

6.13 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，且 $f(x)\uparrow$. 证明：对于 $\forall x_1,x_2\in[a,b]$ $(x_1<x_2)$，以及 $\lambda>0$，$\mu>0$，$\lambda+\mu=1$，恒有不等式 $f(\lambda x_1+\mu x_2)<\lambda f(x_1)+\mu f(x_2)$.

法一：令 $F(t)=\lambda f(t)+\mu f(x_2)-f(\lambda t+\mu x_2)$

求导..

法二：令 $x_0=\lambda x_1+\mu x_2$，$x_1<x_0<x_2$.

在 (x_1,x_0)，(x_0,x_2) 段分别对 $f(x)$ 应用拉氏中值定理

6.14 在区间 $[0,a]$ 上，$|f''(x)|\le M$，且 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值.　泰 ×2

证明：$|f'(0)|+|f'(a)|\le Ma$.

证明：$\exists c\in(0,a)$，使 $f'(c)=0$.

在 $(0,c)$，(c,a) 上分别使用拉氏中值定理.

$$\begin{cases} f'(c)-f'(0)=f''(\xi_1)\cdot c, & \xi_1\in(0,c) \\ f'(a)-f'(c)=f''(\xi_2)(a-c), & \xi_2\in(c,a). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ ✓.

6.15 设 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上二次可微，且当 $x\in[0,2]$ 时，$|f(x)|\le1$，$|f''(x)|\le1$. 证明：对一切 $x\in[0,2]$，$|f'(x)|\le2$ 成立.　泰 ×2

证明：$x=0$ 处泰勒展开：$f(0)=f(x)+f'(x)(0-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_1)(0-x)^2$ ①

$x=2$ 处泰勒展开：$f(2)=f(x)+f'(x)(2-x)+\frac{1}{2}f''(\xi_2)(2-x)^2$ ②

①-②：$2f'(x)=f(2)-f(0)+\frac{x^2}{2}f''(\xi_1)-\frac{(2-x)^2}{2}f''(\xi_2)$

$|2f'(x)|\le|f(2)|+|f(0)|+\frac{x^2}{2}|f''(\xi_1)|+\frac{(x-2)^2}{2}|f''(\xi_2)|$

$\le2+\frac{1}{2}|x^2+(x-2)^2|\le4$.

注意：说明 $|f(2)|$，$|f(0)|\le2$ 成立.

7.2 设两地之间的直线距离 $|AB|=2700m$，A 为起点，B 为终点，一司机驾车从 A 由静止直线运动到 B 停止，恰好用了 $60s$. 证明该车在行驶过程中至少有一时刻的加速度的绝对值不小于 $3m/s^2$.　[小学题]　泰 ×2

证明：$x(t)$ 分别在 0 和 60s 处展开，$x'(0)=x'(60)=0$.

$\Rightarrow$ 对

8.3 设 $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{|x|^{\frac{1}{n}}}{n+\frac{1}{n}}+\frac{|x|^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{2}{n}}+\cdots+\frac{|x|^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{n}{n}}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ 求 $f(x)$.

定积分：$\int_a^b f(x)dx=\sum\limits_{i=1}^{\infty} f(a+\frac{b-a}{n}i)\cdot\frac{b-a}{n}$

放缩 夹逼

解：当 $x\neq 0$ 时，$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|x|^{\frac{k}{n}}}{n+1}<f(x)<\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|x|^{\frac{k}{n}}}{n}$

1° 当 $x=\pm1$ 时，$\sum\frac{1}{n+1}=\sum\frac{1}{n}=1$，$f(\pm1)=1$.

2° 当 $x\neq\pm1,0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|x|^{\frac{k}{n}}}{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{|x|^{\frac{k}{n}}}{n}=\int_0^1|x|^t dt \overset{①}{=} \frac{|x|-1}{\ln|x|}$

不能 $=\int_0^1|x|^x dx$

① $\int_0^1 a^t dt\ (a=|x|)$
$=\frac{a^t}{\ln a}\Big|_0^1=\frac{a-1}{\ln a}$

$\therefore f(x)=\begin{cases}\frac{|x|-1}{\ln|x|}, & 其它\\ 0, & x=0\\ 1, & x=\pm1\end{cases}$

……，说明 $f'(0)$ 不存在，$f'(0)$，$f'(\pm1)$ 要单列说明

8.4 设 $a,b>0$，反常积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\cos^a x\sin^b x}$ 收敛，则 $a,b,1$ 的关系为 $a,b<1$

[分析] $x\to0$，$\sin^b x\to0$，收敛 则 $0<b<1$

$x\to\frac{\pi}{2}$，$\cos^a x\to0$，收敛 则 $0<a<1$

→ 这类题掌握左右的意蕴，根据重要点判别

$\int_0^1\frac{1}{x^p}dx$	$0<p<1$	收敛
	$p\geq1$	发散
$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}dx$	$p\leq1$	发散
	$p>1$	收敛

例9.4 求不定积分 $I=\int\frac{x^2dx}{(x\sin x+\cos x)^2}$

分析：联想到 $d\left[\frac{1}{f(x)}\right]=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}dx$

令 $f(x)=x\sin x+\cos x$，则 $f'(x)=\sin x+x\cos x-\sin x=x\cos x$.

凑出来，$I=\int\frac{x}{\cos x}\cdot\frac{x\cos x}{(x\sin x+\cos x)^2}dx$

$=-\int\frac{x}{\cos x}d\left(\frac{1}{x\sin x+\cos x}\right)$

$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\frac{1}{x\sin x+\cos x}\cdot\frac{\cos x+x\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=\frac{-x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\int\sec^2 x dx$

$=-\frac{x}{\cos x(x\sin x+\cos x)}+\tan x+C$

例9.5 求 $I_n=\int\sin^n x dx$ 的递推公式.

解：$I_n=\int\sin^{n-2}(1-\cos^2 x)dx=I_{n-2}-\int\sin^{n-2}x\cos^2 x dx$ ~~$=I_{n-2}-\int\sin^{n-2}x\cos x d\sin x$~~

$=I_{n-2}-\int\underbrace{\sin^{n-2}x\cos x}_{u'}\cdot\underbrace{\cos x}_{v}dx$

$u=\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x$

$v'=-\sin x$

$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x+\int\frac{-\sin^n x}{n-1}dx$

$=I_{n-2}-\frac{1}{n-1}\sin^{n-1}x\cos x-\frac{I_n}{n-1}$

$\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x$

例9.9 求 $I=\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx$

令 $x=\tan t$. $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)dt=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin x+\cos x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\cos x)dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sqrt{2}\cos(\frac{\pi}{4}-x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{2}\ln 2dx+\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos(\frac{\pi}{4}-x)dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos x dx$

$\overset{令u=\frac{\pi}{4}-x}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\ln\cos u\,d(-u)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos u\,du.$

9.2 求 $\int_0^1 \arcsin\sqrt[3]{x}\,dx$.

令 $t=\arcsin\sqrt[3]{x}$，$x=\sin^3 t$.

$I=\boxed{\int_0^1 t\,d(\sin^3 t)}$

$=t\sin^3 t\Big|_0^1-\int_0^1 \sin^3 t\,dt$

9.3 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-e^{2x}}\,dx$

令 $e^x=\sin t$，~~则 $x=\ln\sin t$~~，$dx=\frac{\cos t}{\sin t}dt$

$I=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}|\cos t|\frac{\cos t}{\sin t}dt.=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 t}{\sin t}dt$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(\csc t-\sin t)dt$ $\quad\int\csc t\,dt=\ln|\csc t-\cot t|$

9.4 求 $\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{x^2+4x}}$.

① $=\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\sqrt{(x+2)^2-4}}$ 令 $x+2=2\sec u$. $u\in(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3})$

$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sec u\tan u}{2(\sec u-1)2\tan u}du$

$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-\cos u}du=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}\cdot\csc^2\frac{u}{2}du$

$=\frac{1}{2}\cot\frac{u}{2}\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}$

② 令 $t=\frac{1}{x}$. $t\in(0,\frac{1}{2})$.

$I=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dt}{\sqrt{1+4t}}$ ✓

9.6 求 $\int_0^4\frac{3}{4}x^2\sqrt{4x-x^2}\,dx$

① $\frac{3}{4}\int_0^4 x^2\sqrt{4-(x-2)^2}\,dx\xlongequal{令x-2=2\sin t}\frac{3}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}4(\sin t+1)^2\cdot2|\cos t|\cdot2\cos t\,dt$

$=12\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin t+1)^2\cos^2 t\,dt$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^2 t+1)(1-\sin^2 t)\,dt$

$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^4 t)dt$

$=24\times\frac{\pi}{2}-24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\,dt$

$=12\pi-24\cdot\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}$

$=12\pi-\frac{9}{2}\pi$.

$=\frac{15}{2}\pi$.

② $\int_0^4\frac{3}{4}x^2\sqrt{x(4-x)}$，令 $x=4\sin^2 t$，$\frac{dx}{dt}=8\sin t\cos t$

$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3}{4}\times16\cdot\sin^4 t\cdot4\sin t\cos t\cdot8\sin t\cos t\,dt$.

$=3\times2^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t\cos^2 t\,dt$.

$=3\times2^7\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)dt$

$=3\times2^7\left(\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}-\frac{7}{8}\times\frac{5}{6}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right)$.（华里士公式）

9.7 求 $I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{1+\sin x}dx$ 　奇偶性妙用

$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x(1-\sin x)}{\cos^2 x}dx=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\cos^2 x}dx-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx$

$=0-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x}{\cos^2 x}dx=-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}x\,d(\sec x)$

$=-(x\sec x\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sec x\,dx)$.

$=-2x\sec x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}+2\ln(\sec x+\tan x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}$

9.8. $I_n=\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$ 的递推公式，并求 I_3.

解：$I_n=\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{x^{n+1}\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{d\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}$

$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}-\int\sqrt{1+x^2}\,d(\frac{1}{x^{n+1}})$.

$=\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n+1}}+(I_n+I_{n+2})(n+1)$.

$\Rightarrow I_{n+2}\sim I_n$.

$I_1=\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=\int\frac{d\sqrt{1+x^2}}{x^2}=\int\frac{dt}{t^2-1}$

$=\cdots$ 　答案为三角代换，此法亦可

9.10. 求 $\int_0^2\frac{xe^x}{(1+x)^2}dx$

$=\int_0^2\left[\frac{e^x}{1+x}-\frac{e^x}{(1+x)^2}\right]dx$ 直接裂开！

$=\frac{e^x}{1+x}\Big|_0^2+\int_0^2\frac{e^x}{(1+x)^2}dx-\int_0^2\frac{e^x}{(1+x)^2}dx$.

分部积分，前后相消.

9.13. 设 $y'(x)=\arctan(x-1)^2$，且 $y(0)=0$，求 $\int_0^1 y(x)dx$.

【积分升降阶】

$\int_0^1 y(x)dx=xy(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xy'(x)dx$

$=y(1)-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2dx-\underbrace{\int_0^1\arctan(x-1)^2dx}_{y(1)-y(0)}$

$=-\int_0^1(x-1)\arctan(x-1)^2dx$

令 $t=x-1$. $=-\int_{-1}^0 t\arctan t^2\,dt$.

$=-\frac{1}{2}\int_{-1}^0\arctan t^2\,dt^2$.

令 $u=t^2$. $=\frac{1}{2}\int_0^1\arctan u\,du$

$=\frac{1}{2}(u\arctan u\Big|_0^1-\int_0^1\frac{u}{1+u^2}du)$.

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\int_0^1\frac{du^2}{1+u^2}$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln(1+u^2)\Big|_0^1$

$=\frac{\pi}{8}-\frac{\ln2}{4}$

例11.3 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续，且 $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}f(x)\tan x\,dx=0$，证明在区间 $(-1,1)$ 内至少存在互异的两点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

分析：要证 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$，则必对 $F(x)$ 研究。由罗尔定理，$(-1,1)$ 上 $F(x)$ 必还有一个零点。

证明：令 $F(x)=\int_{-1}^{x}f(x)dx$. $F(-1)=F(1)=0$

若 $F(x)$ 在 $(-1,1)$ 内无零点，不妨设 $F(x)>0\ (-1<x<1)$.

$\int_{-1}^{1}f(x)\tan x\,dx=\int_{-1}^{1}\tan x\,dF(x)=F(x)\tan x\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{F(x)}{\cos^2 x}dx$

$=-\int_{-1}^{1}F(x)\sec^2 x\,dx<0$ （保号性）.

与题设矛盾，故 $\exists x_0\in(-1,1)$，使 $F(x_0)=0$，#.

例11.4 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $g(x)$ 不变号，证明至少存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使得

闭区间

介值、积分表达式

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=f(\xi)\int_a^b g(x)dx$$

证明：$\because f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

$\therefore$ 令 $f(x)\in[m,M]$.

$\therefore\quad m\int_a^b g(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx\le M\int_a^b g(x)dx$

$\Rightarrow m\le\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}\le M.$

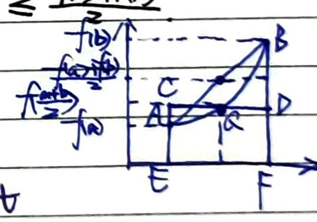
$\therefore\ \exists\xi\in[a,b]$，使 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi)$，#

例11.5，上题中 $\xi\in(a,b)$. 求证.　　柯西中值定理.

证明：即证 $\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}=f(\xi)$. 秒解.

处理被积函数.

例11.8 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall t\in[0,1]$ 有以下 $x_1,x_2\in[a,b]$ 恒满足不等式 $f[tx_1+(1-t)x_2]\le tf(x_1)+(1-t)f(x_2)$，证明 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\dfrac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}\le\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$.



证明：[分析]. 左式：$S_{EADF}\le S_{曲边梯}$

右式：$S_{曲边梯}\le S_{梯AEFB}$.

令 $x=ta+(1-t)b$，当 $t=1$，$x=a$，$t=0$，$x=b$.

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)\int_0^1 f[ta+(1-t)b]dt\le(b-a)\int_0^1[tf(a)+(1-t)f(b)]dt$

$=(b-a)\dfrac{f(a)+f(b)}{2}$

$\because\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(x)dx+\boxed{\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}f(x)dx}$　令 $x=a+b-t$（区间变换）

$=-\int_{\frac{a+b}{2}}^{a}f(a+b-t)dt=\int_a^{\frac{a+b}{2}}f(a+b-t)dt$

$\Rightarrow\int_a^b f(x)dx=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]dx\ge2\int_a^{\frac{a+b}{2}}f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx=(b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ #.

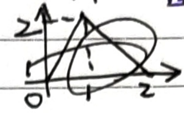
[超纲]

例11.9 设f(x)在[0,2]连续，在(0,2)可导，且$f(0)=f(2)=1$，$|f'(x)|\le 1$，证明：$\int_0^2 f(x)dx \le 3$.

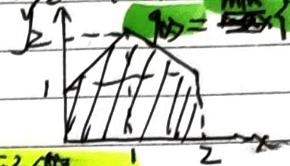
证明：取$x\in(0,2)$，① 在$(0,x)$内，$f(x)=f(0)+x\cdot f'(\xi_1)$ 拉格朗日 $\xi_1\in(0,x)$

② 在$(x,2)$内，$f(x)=f(2)-(2-x)f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(x,2)$

$\Rightarrow f(x)\le g(x)=\begin{cases}1+x, & 0<x<1\\ 3-x, & 1<x<2\end{cases}$ $\min\{1+x,3-x\}$



$g(x)=\min\{1+x,3-x\}$



$\therefore \int_0^2 f(x)dx \le \int_0^2 g(x)dx = 3$. 拉格朗日、放缩

例11.10 设f(x)二阶可导，且$f''(x)\ge 0$，u(t)为任一连续函数，$a>0$，证明： 泰勒公式

$$\frac{1}{a}\int_0^a f[u(t)]dt \ge f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right]$$

证明：对f(x)用泰勒公式，有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2$

$\ge f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$

令 $x=u(t)$，$x_0=\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt$. $f[u(t)] \ge f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right] + f'(x_0)(u(t)-x_0)$.

从0~a积分：$\int_0^a f[u(t)]dt \ge a f\left[\frac{1}{a}\int_0^a u(t)dt\right] + f'(x_0)\underbrace{\left[\int_0^a u(t)dt - a x_0\right]}_{=0\,(?)}$

例11.11 设$f(x)=\int_x^{x+1}\sin e^t dt$，证明 $e^x|f(x)|\le 2$. 分部积分，放缩法

令$e^t=u$. $f(x)=\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{\sin u}{u}du = -\frac{\cos u}{u}\Big|_{e^x}^{e^{x+1}} - \int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,du$.

$=\frac{\cos e^x}{e^x}-\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}-\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,du$.

故 $|f(x)| \le \left|\frac{\cos e^x}{e^x}\right| + \left|\frac{\cos e^{x+1}}{e^{x+1}}\right| + \int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}\cos u\,du$. $(|\cos x|<1)$

$\le \frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}+\int_{e^x}^{e^{x+1}}\frac{1}{u^2}du$

$=\frac{1}{e^x}+\frac{1}{e^{x+1}}-\frac{1}{e^{x+1}}+\frac{1}{e^x}$

$=\frac{2}{e^x}$

例11.13 设$|f(x)|\le\pi$，$f'(x)\ge m>0$ $(a\le x\le b)$，证明$\left|\int_a^b \sin f(x)dx\right|\le\frac{2}{m}$. 反函数换元

证明：$\because a\le x\le b$，$f(x)\uparrow$ 有的题令$t=\sin f(x)$

$\therefore$ 反函数存在，令$t=f(x)$，$x=g(t)$. $\begin{cases}\alpha=f(a)\\ \beta=f(b)\end{cases}$ $(-\pi\le\alpha<\beta\le\pi)$.

$\int_a^b \sin f(x)dx = \int_\alpha^\beta \sin t\, g'(t)dt = \int_\alpha^\beta \frac{\sin t}{f'(x)}dt \le \frac{1}{m}\int_\alpha^\beta \sin t\,dt$

$\therefore \left|\int_a^b \sin f(x)dx\right| \le \frac{1}{m}\left|\int_\alpha^\beta \sin t\,dt\right| \le \frac{1}{m}\int_0^\pi \sin t\,dt = \frac{2}{m}$

例11.14 求$\lim n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$. 求递推、夹逼

解：令$f(n)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx$

$f(n)+f(n+2)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\underbrace{(1+\tan^2 x)}_{\sec^2 x}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\sec^2 x\,dx = \frac{1}{n+1}\tan^{n+1}x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1}$

在$0\le x\le\frac{\pi}{4}$时，$\tan^{n+2}x\le\tan^n x\le\tan^{n-2}x$. $\Rightarrow f(n+2)\le f(n)\le f(n-2)$.

$\therefore \frac{1}{n+1}\le f(n)+f(n+2)\le 2f(n)\le f(n)+f(n-2)\le\frac{1}{n-1}$

$\therefore \frac{n}{2(n+1)}\le nf(n)\le\frac{n}{2(n-1)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} n\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^n x\,dx=\frac{1}{2}$.

11.2 设 $f(x), g(x)$ 在 $[0,1]$ 上的导数连续，且 $f(0)=0$, $f'(x)\ge 0$, $g'(x)\ge 0$. 证明对 $\forall a\in[0,1]$，有

$$\int_0^a g(x)f'(x)\,dx + \int_0^1 f(x)g'(x)\,dx \ge f(a)g(1).$$

证明：令 $F(a)=\int_0^a g(x)f'(x)\,dx+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx - f(a)g(1)$

$F'(a)=g(a)f'(a)-f'(a)g(1)=f'(a)[g(a)-g(1)]\le 0.$

∴ $F(a)$ 单调不增.

$F(0)=0+\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx - f(0)g(1)=\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx$ 　　没啥用

$F(1)=\int_0^1[f'(x)g(x)+f(x)g'(x)]\,dx - f(1)g(1)=0.$ 　　有用

∴ $0\le a\le 1$ 时，有 $F(a)\ge 0$. #

11.6 设 n 为大于1的整数，证明不等式 $(n-1)! < e\left(\frac{n}{e}\right)^n < n!$

证明：即证：$\sum_{k=1}^{n-1}\ln k < 1+n\ln n - n < \sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1)$

∵ $\sum_{k=1}^{n-1}\ln k < \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln x\,dx = \boxed{\int_1^n \ln x\,dx}$ 　　$\int_1^n \ln x\,dx=(x\ln x - x)\Big|_1^n$

$= n\ln n - n+1$

$\sum_{k=1}^{n-1}\ln(k+1) > \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\ln(x+1)\,dx = \int_1^n \ln(x+1)\,dx > \int_1^n \ln x\,dx.$

∴ 得证.

11.7 设 $f(x)$ 是区间 $[1,+\infty)$ 内单调减少且非负的连续函数，

$$a_n=\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\,dx \quad (n=1,2,\cdots)$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在。

证明：$f(k+1)\le\int_k^{k+1}f(x)\,dx\le f(k)$

∴ $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}\left[f(k)-\int_k^{k+1}f(x)\,dx\right]+f(n)\ge 0.$

∴ $\{a_n\}$ 有下界.

$a_{n+1}-a_n=f(n+1)-\int_n^{n+1}f(x)\,dx\le 0$

∴ $a_{n+1}\le a_n$

∴ $\{a_n\}\downarrow$

∴ $\{a_n\}$ 极限存在！

第13讲 多元函数微分学

归纳：①先代再求

②可微：$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \dfrac{\Delta z-(A\Delta x+B\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$

③偏导数连续 → 可微 → 偏导存在；$f(x,y)$连续 → 极限存在；方向导数存在.

例13.8 二元函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处可微的一个充分条件是（ ）

A. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}[f(x,y)-f(0,0)]=0$ ✓连续

B. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$ 且 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{f(0,y)-f(0,0)}{y}=0$ ✓偏导存在.

C. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$ ✓可微定义

D. $\lim\limits_{x\to 0}[f'_x(x,0)-f'_x(0,0)]=0$，且$\lim\limits_{y\to 0}[f'_y(0,y)-f'_y(0,0)]=0$ ✓类似偏导连续

可举反例 $f(x,y)=\begin{cases}0, & xy=0\\ 1, & xy\neq 0\end{cases}$

例13.12 设$y=y(x)$，$z=z(x)$是方程$z=xf(x+y)$和$F(x,y,z)=0$所确定的函数，其中f和F分别具有一阶连续导数和一阶连续偏导数，且$F'_y+xf'F'_z\neq 0$，求$\dfrac{dz}{dx}$.

解：分别在两方程对x求导：$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=f+x\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)f' \\ F'_x+F'_y\dfrac{dy}{dx}+F'_z\dfrac{dz}{dx}=0,\end{cases}$

⇒可解出$\dfrac{dz}{dx}$.

例13.15 设$F(x,y,z)$连续可微，$F'_xF'_yF'_z\neq 0$，方程$F(x,y,z)=0$可确定连续可微的隐函数$z=z(x,y)$，$y=y(z,x)$，$x=x(y,z)$，则（ ）.

问：$\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial z}=$ <u>-1</u>. [隐函数求导]

$=\left(-\dfrac{F'_y}{F'_z}\right)\left(-\dfrac{F'_x}{F'_y}\right)\left(-\dfrac{F'_z}{F'_x}\right)=-1$

例13.17 二元函数$f(x,y)=x^y$在点$(e,0)$处的二阶（即$n=2$）泰勒展开式（不要求余项）为？

$f(x,y)=f(x_0,y_0)+(f'_x,f'_y)_{x_0}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2!}(\Delta x\ \ \Delta y)\begin{pmatrix}f''_{xx} & f''_{xy}\\ f''_{yx} & f''_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}+R_2$ [二阶泰勒]

故$f(e,0)=1$，$f'_x(x,y)=yx^{y-1}$，$f'_x(e,0)=0$，$f'_y(x,y)=x^y\ln x$，$f'_y(e,0)=1$

$f''_{xx}(x,y)=y(y-1)x^{y-2}$，$f''_{xx}(e,0)=0$，$f''_{xy}(x,y)=x^{y-1}+yx^{y-1}\ln x$，$f''_{xy}(e,0)=\dfrac{1}{e}$.

$f''_{yy}(x,y)=x^y(\ln x)^2$，$f''_{yy}(e,0)=1$ ⇒ $f(x,y)=1+(0\ \ 1)\begin{pmatrix}x-e\\ y\end{pmatrix}+\dfrac{1}{2}(x-e\ \ y)\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{e}\\ \frac{1}{e} & 1\end{pmatrix}(x-e\ \ y)$

$=1+y+\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2}{e}(x-e)y+y^2\right]$

例13.19 已知函数$z=z(x,y)$在区域D内满足方程$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+a\dfrac{\partial z}{\partial x}+b\dfrac{\partial z}{\partial y}+c=0$ $(c>0)$

则在D内函数$z=z(x,y)$.（C）.

A. ∃极大值 B. ∃极小值 C. 无极值 D. 无法判断

若$z(x,y)$在$(x_0,y_0)\in D$上取得极值，则有$\dfrac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x_0}=\dfrac{\partial z}{\partial y}\Big|_{x_0}=0$. [反证法]

$\therefore \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-c<0$.

⇒ $\Delta=AC-B^2<0$.

⇒ 不是极值点.

例13.29 设函数$f(u)$有二阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$$

若$f(0)=0$，$f'(0)=0$，求$f(u)$的表达式。

解：$\frac{\partial z}{\partial x}=f'\cdot e^x\cos y$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''e^{2x}\cos^2 y+f'e^x\cos y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=f'e^x(-\sin y)$.　$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''e^{2x}\sin^2 y+f'e^x(-\cos y)$

$\therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''\cancel{e^{2x}}=(4z+e^x\cos y)\cancel{e^{2x}}$

$\Rightarrow f''(e^x\cos y)=4z+e^x\cos y$

$f''(u)=4f(u)+u$　常微分方程。

$\Rightarrow f''-4f=u$.

$\lambda^2-4\lambda^0=0\Rightarrow\lambda=\pm2$.　$f(u)=C_1e^{2u}+C_2e^{-2u}-\frac{u}{4}$

代入$f(0)=f'(0)=0$，解出C_1,C_2.

例13.30 设$f(x,y)$是一阶偏导数连续的正值函数，满足$f'_x(x,y)+f(x,y)=0$，又$f'_y(0,y)=\tan y$，$f(0,0)=1$，求$f(x,y)$.

解：$\because \frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}=-1$

$\therefore$ 对两边x积分，有$\int\frac{f'_x(x,y)}{f(x,y)}dx=-x+\varphi(y)$

$\ln f(x,y)=-x+\varphi(y)$

$f(x,y)=e^{\varphi(y)}\cdot e^{-x}$

$\because f(0,0)=1$，有$\varphi(0)=0$，

$f'_y(0,y)=e^{\varphi(y)}\cdot\varphi'(y)=\tan y$，对$y$积分　注：$\int\tan x\,dx=-\ln|\cos x|+C$

$[e^{\varphi(y)}]'$

$\therefore e^{\varphi(y)}=-\ln|\cos y|+C$

令$y=0$．$1=C$

$\therefore e^{\varphi(y)}=1-\ln|\cos y|$

$\therefore f(x,y)=e^{-x}(1-\ln|\cos y|)$.

13.4 如果函数$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续，则下列命题正确的是（B）．［选择］

A. 若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微．　取$f(x,y)=|x|+|y|$.

B. 若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(x,y)$在$(0,0)$处可微．

C. 若$f(x,y)$在$(0,0)$处可微，则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$存在．　取$f(x,y)=1$

D. 正

B：若$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在，则$f(0,0)=0$．则$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$　$\to+\infty$

$\to0$（可微）．

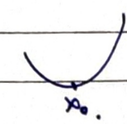
13.9 设$F(x,y)$在点(x_0,y_0)的某一邻域上有二阶连续偏导数，且 选择

$F(x_0,y_0)=0$，$F'_x(x_0,y_0)=0$，$F'_y(x_0,y_0)>0$，$F''_{xx}(x_0,y_0)<0$，

则由方程$F(x,y)=0$确定的隐函数$y=y(x)$在$x=x_0$处（ B ）.

A. 取得极大值　B. 取得极小值　C. 不取得极值　D. 无法确定.

$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x_0}=-\left.\frac{F'_x}{F'_y}\right|_{x_0}=0$　$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{F''_{xx}F'_y-F'_xF''_{xy}}{F'^2_y}=-\frac{F''_{xx}}{F'_y}>0.$



13.17 设函数$f(x,y)$可微，$\frac{\partial f}{\partial x}=-f$，$f(0,\frac{\pi}{2})=1$，且满足 [难、综合]

$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})}{f(0,y)}\right]^n=e^{\cot y}$，求$f(x,y)$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{f(0,y)}+1\right]^{\frac{f(0,y)}{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}\cdot\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{f(0,y)}\cdot n}=\lim\limits_{n\to\infty}\exp\frac{f(0,y+\frac{1}{n})-f(0,y)}{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{f(0,y)}$

$=\exp\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}=\exp\cot y \Rightarrow \frac{f'_y(0,y)}{f(0,y)}=\cot y.$

$\because \frac{\partial f}{\partial x}=-f$　　注意这种形式，化为除式积分

$\therefore \frac{1}{f}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}=-1$ 两边对x积分得，$\ln|f|=-x+C(y) \Rightarrow f=C(y)e^{-x}$　$C(y)=\pm e^{C(y)}$.

$\therefore f'_y(x,y)=C'(y)e^{-x} \Rightarrow C'(y)=e^0\cdot f'_y(0,y)=f(0,y)\cdot\cot y=C(y)\cot y$　注：$f(0,y)=C(y)$

$\Rightarrow \frac{d[C(y)]}{C(y)}=\cot y\,dy$，对$y$积分，

有 $\ln|C(y)|=\ln a|\sin y|$ $(a>0)$ $\Rightarrow C(y)=b\sin y$ $(b=\pm a)$.

将$f(0,\frac{\pi}{2})=1$代入，有 $f(0,\frac{\pi}{2})=b\cdot\sin\frac{\pi}{2}\cdot e^0=1 \Rightarrow b=1.$

$\therefore f(x,y)=e^{-x}\sin y.$

第14讲 二重积分

例14.6 设 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le \pi, 0\le y\le \pi\}$，计算 $I=\iint_D |\cos(x+y)|dxdy$.

$I=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\pi}|\cos(x+y)|dy = \pi\cdot\int_0^{\pi}|\cos y|dy = 2\pi$.

注：$\int_0^{\pi}|\cos(a+z)|dz=\int_0^{\pi}|\cos z|dz = 2$.

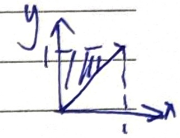
例14.19 设连续函数 $f(x)$ 满足 $f(x)=1+\frac{1}{2}\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$，记 $I=\int_0^1 f(x)dx$.

(1) 证明 $I=1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(y-x)dx$ [二重积分，$f(x)$ 内有一重].

(2) 求 I 的值.

(1) 证明：对 $f(x)$ 积分，则有 $I=\int_0^1 f(x)dx = 1+\frac{1}{2}\int_0^1 dx\int_x^1 f(y)f(y-x)dy$　　$D:\begin{cases}x<y<1\\0<x<1\end{cases}$

$= 1+\frac{1}{2}\int_0^1 f(y)dy\int_0^y f(y-x)dx$.　　$\Rightarrow\begin{cases}0<x<y\\0<y<1\end{cases}$



(2) 令 $u=y-x$. 则 $\int_0^y f(y-x)dx = -\int_y^0 f(u)du = \int_0^y f(u)du$

由(1)得，$I = 1+\frac{1}{2}\int_0^1\left[\int_0^y f(u)du\right]d\left[\int_0^y f(u)du\right] = 1+\frac{1}{2}\left[\int_0^y f(u)du\Big|_0^1\right]^2\cdot\frac{1}{2}$

$= 1+\frac{1}{4}\left[\int_0^1 f(u)du\right]^2$

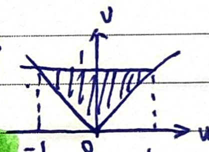
$= 1+\frac{1}{4}I^2$

$\Rightarrow I=2$.

例14.22 计算积分 $\iint_D \cos\frac{x-y}{x+y}d\sigma$，其中 $D=\{(x,y)\mid x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$.

解：令 $u=x-y$，$v=x+y$，则 $x=\frac{u+v}{2}$，$y=\frac{-u+v}{2}$.

$\cancel{\iint_D \cos\frac{u}{v}d\sigma}$　积分区域 D 为 $\{(u,v)\mid v\le 1, v\ge -u, v\ge u\}$



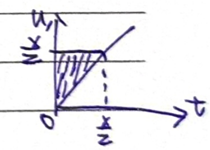
$\iint_D \cos\frac{x+y}{x-y}d\sigma = \iint_D \cos\frac{u}{v}|J|dudv$，其中 $J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$.

$=\frac{1}{2}\int_0^1 dv\int_{-v}^{v}\cos\frac{u}{v}du$　　$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$

$=\frac{1}{2}\int_0^1 2\sin 1\cdot v\,dv = \frac{1}{2}\sin 1$.

注：换元法的代价

14.8 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^{\frac{x}{2}}dt\int_{\frac{x}{2}}^{t}e^{-(t-u)^2}du}{x^2\left(1-e^{-\frac{x^4}{4}}\right)}$



① 交换积分次序　$\int_0^{\frac{x}{2}}dt\int_{\frac{x}{2}}^{t}e^{-(t-u)^2}du = -\int_0^{\frac{x}{2}}dt\int_t^{\frac{x}{2}}e^{-(t-u)^2}du = -\int_0^{\frac{x}{2}}du\int_0^u e^{-(t-u)^2}dt$

② 变量代换. 令 $v=t-u$. $-\int_0^{\frac{x}{2}}du\int_0^u e^{-(t-u)^2}dt = \int_0^{\frac{x}{2}}du\int_0^u e^{-v^2}dv$

③ 洛必达.

14.11 计算 $I=\iint_D|3x+4y|dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$

[极坐标]　$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1|3r\cos\theta+4r\sin\theta|\,r\,dr$

$=\int_0^{2\pi}|3\cos\theta+4\sin\theta|d\theta\cdot\int_0^1 r^2dr$

$=\frac{5}{3}\int_0^{2\pi}|\sin(\theta+\varphi)|d\theta$　　周期

$=\frac{10}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta\,d\theta$

$=\frac{20}{3}$

14.12 设 $f(x)$ 在 $[0,a]$ 上连续，证明 $\iint_D f(x+y)dxdy=\int_0^a xf(x)dx$，其中 $D: x\ge 0, y\ge 0, x+y\le a$

证明：$\iint_D f(x+y)dxdy=\int_0^a dy\int_0^{a-y}f(x+y)dx = \int_0^a dy\int_y^a f(t)dt = \int_0^a f(t)dt\int_0^t dy = \int_0^a tf(t)dt$

交换积分次序

变量代换.

第15讲 微分方程

例15.8 求微分方程 $y'\cos y=(1+\cos x\sin y)\sin y$ 的通解.

令 $z=\sin y$，则 $\frac{dz}{dx}=\cos y\frac{dy}{dx}$. $\frac{dz}{dx}=(1+\cos x\cdot z)\cdot z$

$\Rightarrow \frac{dz}{dx}-z=\cos x\cdot z^2$ (伯努利方程).

令 $u=z^{-1}$，得解.

例15.14 欧拉方程 $x^2\frac{d^2y}{dx^2}+4x\frac{dy}{dx}+2y=0\ (x>0)$ 的通解为

注：18讲P28x的通解、特解设法

注：当 $x>0$ 时，令 $x=e^t$；当 $x<0$ 时，令 $x=-e^t$

令 $x=e^t$，则 $t=\ln x$. $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$.

$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt}+\frac{1}{x}\frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{dt}{dx}$

$=\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)$

代入原方程，得 $\frac{d^2y}{dt^2}+3\frac{dy}{dt}+2y=0$. #

例15.15 求一个以 $y_1=te^t$，$y_2=\sin 2t$ 为两个特解的四阶常系数齐次线性微分方程，并求其通解.

[分析] 由 y_1、y_2 的特殊性，可写出全部4个特解 $y_1\ y_2\ y_3\ y_4$.

易知 $y_3=e^t$，$y_4=\cos 2t$，

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_3=1$，$\lambda_2=2i$，$\lambda_4=-2i$

$\Rightarrow$ 特征方程 $(\lambda-1)^2(\lambda^2+4)=0$，展开为 $\lambda^4-2\lambda^3+5\lambda^2-8\lambda+4=0$.

微分方程为 $y^{(4)}-2y'''+5y''-8y'+4y=0$.

其通解为 $y=(C_1+C_2t)e^t+C_3\cos 2t+C_4\sin 2t$ ($C_1C_2C_3C_4$ 为任意常数).

例15.20 设 $f(x)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上具有连续一阶导数，且满足 $f(0)=1$ 及 $f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$.

求 $f'(x)$，证明：当 $x>0$ 时，有 $e^{-x}<f(x)<1$. [综合题]

解：① 令 $x=0$，有 $f'(0)+f(0)-0=0 \Rightarrow f'(0)=-f(0)=-1$.

$f'(x)+f(x)-\frac{1}{x+1}\int_0^x f(t)dt=0$

$(x+1)[f'(x)+f(x)]=\int_0^x f(t)dt$.

求导：$f'(x)+f(x)+(x+1)f''(x)+(x+1)f'(x)=f(x)$

$(x+1)f''(x)+(x+2)f'(x)=0$.

$\Rightarrow f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{1+x}$

$f'(0)=-1$ 代入，得 $C=-1$.

$\therefore f'(x)=-\frac{e^{-x}}{1+x}$

② 在 $[0,x]$ 上应用拉氏中值定理，得 $f(x)-f(0)=xf'(\xi)=-\frac{xe^{-\xi}}{1+\xi}<0\ (0<\xi<x)$.

$\therefore f(x)<f(0)$.

令 $F(x)=f(x)-e^{-x}$.

则 $F'(x)=f'(x)+e^{-x}=-\frac{e^{-x}}{1+x}+e^{-x}=\frac{xe^{-x}}{1+x}>0\ (x>0)$.

$\therefore F(x)\nearrow$. $F(0)=f(0)-e^{0}=0$.

$\therefore F(x)>0$.

$\therefore e^{-x}<f(x)<f(0)$

15.3 求微分方程 $y' = \frac{1}{2x-y^2}$ 的通解.

解: $\frac{dx}{dy} = 2x - y^2$

$\frac{dx}{dy} - 2x = -y^2$

$P(y) = -2$. $Q(y) = -y^2$.

$x = e^{\int 2dy}\left[\int e^{\int -2dy} \cdot (-y^2)\,dy + C\right]$

15.2 求微分方程 $xy' = y(\ln x + \ln y - 1)$ 的通解.

解: $\Rightarrow xy' + y = y(\ln x + \ln y)$ [凑微分]. (求导逆用).

令 $u = xy$. $\Rightarrow u' = \frac{u}{x}\ln u$

$\frac{du}{u\ln u} = \frac{dx}{x}$

$\ln|\ln u| = \ln C_1 x$

$\Rightarrow u = e^{Cx}$ $(C = \pm C_1)$. 即 $xy = e^{Cx}$

15.8 求微分方程 $\cos y \cdot y' - \sin y = e^x$ 的通解。 (求导公式逆用)

解: 令 ~~$u = y\cos y$~~ $u = \sin y$

则 $u' - u = e^x$

例14.1 $a_n = \int_0^{n\pi} x|\sin x|\,dx$, $n = 1, 2, \cdots$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$. [难点: 积分].

$a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} x|\sin x|\,dx$ 积分可加性

令 $t = x - k\pi$. 区间变换 $\rightarrow$ 去绝对值

则 $a_n = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^{\pi}(t+k\pi)|\sin(t+k\pi)|\,dx$

$= \sum_{k=0}^{n-1}\left[\int_0^{\pi} t\sin t\,dt + k\pi\int_0^{\pi}\sin t\,dt\right]$

$= \sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)\pi$.

$= n^2\pi$.

则 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}} - \frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)$ $(n\to\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$

例14.2 已知数列 $\{na_n\}$ 收敛, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

证明: 令 $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. $T_n = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n - a_{n-1})$

$\therefore T_n = (a_1 - a_0) + 2(a_2 - a_1) + 3(a_3 - a_2) + \cdots + n(a_n - a_{n-1})$

$= -a_0 - (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + na_n$

$= -a_0 - S_{n-1} + na_n$.

$\therefore S_{n-1} = T_n + na_n - a_0$

$\because T_n$, na_n 均收敛. a_0 为常数.

$\therefore S_n$ 收敛.

例16.3 设f(x)在(-∞,+∞)上可导，且$|f'(x)|\le k\ (0<k<1)$，对于给定的x_0，定义$x_{n+1}=f(x_n)$，$n=0,1,2,\cdots$ 证明：

(1) 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-x_{n-1})$绝对收敛。 [拉氏中值]

(2) 极限$\lim_{n\to\infty}x_n$存在（记其极限为a），且a与x_0无关。

证明：(1) 在x_n与x_{n-1}之间，存在一点ξ，使

$$|x_{n+1}-x_n|=|f(x_n)-f(x_{n-1})|=|f'(\xi)(x_n-x_{n-1})|\le k|x_n-x_{n-1}|$$

$$\Rightarrow |x_{n+1}-x_n|\le k|x_n-x_{n-1}|\le\cdots\le k^n|x_1-x_0|$$

$$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|\le\sum_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|x_1-x_0|.$$

$\because 0<k<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|x_1-x_0|$ 收敛

$\therefore$ 由比较判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}|x_n-x_{n-1}|$ 收敛。

(2) 令 $S_n=\sum_{i=1}^{n}(x_n-x_{n-1})$

$$x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_1-x_0)+x_0=S_n+x_0$$

$\because S_n$ 绝对收敛，x_0为常数

$\therefore \lim_{n\to\infty}x_n$存在，记为a

$\because$ 对 $x_{n+1}=f(x_n)$ 两边取 $n\to\infty$。

$\therefore$ 有 $a=f(a)$。

对于$x_0'\ne x_0$，则有$a'=f(a')$，由拉氏中值定理，

$\therefore |a-a'|=|f(a)-f(a')|\le k|a-a'|$

$\Rightarrow (1-k)|a-a'|\le 0$

$\because 1-k>0$

$\therefore a=a'$，与x_0无关。

16.2 判别级数$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 x(1-x)\sin^{2n}x\,dx$的敛散性。

[分析] 先判断级数类型，正项？交错？

解：易知，级数为正项级数，若其收敛，放缩一下。

$$x(1-x)\sin^{2n}x\le x(1-x)\cdot x^{2n}=x^{2n+1}-x^{2n+2}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 x(1-x)\sin^{2n}x\le\int_0^1(x^{2n+1}-x^{2n+2})dx=\frac{1}{2n+2}x^{2n+2}-\frac{1}{2n+3}x^{2n+3}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{2n+3}$$

$$=\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}\sim\frac{1}{4n^2}\ (n\to\infty).$$

$\Rightarrow$ 原级数收敛（P级数）。

补充：P级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1, & 收敛\\ p\le 1, & 发散\end{cases}$

交错P级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}\begin{cases}p>1, & 绝对收敛\\ 0<p\le 1, & 相对收敛\end{cases}$ （$p>0$）。

好多纸

16.5 设函数 $f(x)$ 是区间 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，$|f'(x)|<kf(x)$，其中 $0<k<1$. 任取实数 a_0，定义 $a_n=\ln f(a_{n-1})$，$n=1,2,\cdots$，证明：$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$ 绝对收敛. [拉氏中值定理]

证明：令 $F(x)=\ln f(x)$，在 a_{n-1}、a_{n-2} 之间应用拉氏中值定理，有

$$F(a_{n-1})-F(a_{n-2})=F'(\xi)(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$$\ln f(a_{n-1})-\ln f(a_{n-2})=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$$\Rightarrow a_n-a_{n-1}=\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}(a_{n-1}-a_{n-2})$$

$$\Rightarrow |a_n-a_{n-1}|=\left|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}\right||a_{n-1}-a_{n-2}|<k|a_{n-1}-a_{n-2}|<\cdots<k^{n-1}|a_1-a_0|$$

$\because 0<k<1$

$\therefore \sum_{n=1}^{\infty}k^{n-1}|a_1-a_0|$ 收敛.

$\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 绝对收敛！ 与例16.3同类型

16.7 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $n>1$ 时满足关系式 $a_{n-2}=n(n-1)a_n$，且 $a_0=4$，$a_1=1$，求该幂级数的和函数 $y(x)$ 及其系数 a_n. [逐项求导]

~~证明~~ 解：令 $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$.

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)x^{n-2}\cdot a_n=\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=y(x)$$

$\Rightarrow$ 微分方程 ~~$y-y''=0$~~ $y''-y=0$ 注：下标变换，因为 $n=0$ 时，$y(x)$ 第一项为0. $n=1$ 时，$y'(x)$ 第一项为0.

$\Rightarrow y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}$

$\because y(0)=4$，$y'(0)=1$. 注2：初值来源

$\therefore C_1=\frac{5}{2}$，$C_2=\frac{3}{2}$.

$\therefore y(x)=\frac{5}{2}e^x+\frac{3}{2}e^{-x}$，$-\infty<x<+\infty$

将其展开为 x 的幂级数，$y(x)=\frac{5}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n+\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{5}{2}+\frac{3}{2}(-1)^n\right]\frac{1}{n!}x^n$，$-\infty<x<+\infty$.

$\therefore a_n=\left[\frac{5}{2}+\frac{3}{2}(-1)^n\right]\frac{1}{n!}$

16.8 已知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$

(1) 设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$，证明当 $0<x<1$ 时，$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=\frac{\pi^2}{6}$

(2) 求 $I=\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}dx$

(1) 令 $F(x)=f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)$

求导得 $F'(x)=0$，$\Rightarrow F(x)\equiv C$.

极限求.

令 $x\to1^-$，$C=\frac{\pi^2}{6}$

(2) $I=\int_0^1\frac{1}{2-x}\ln\frac{1}{x}dx$ 已知 $f(1)=\frac{\pi^2}{6}$

$=\int_2^1\frac{1}{y}\ln(2-y)dy$ （令 $y=2-x$）. 在(1)中，令 $x=\frac{1}{2}$，得 $f(\frac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$

$=-\int_1^2\frac{\ln 2}{y}dy-\int_1^2\frac{\ln(1-\frac{y}{2})}{y}dy$ $\therefore I=\frac{\pi^2}{12}-\frac{\ln^2 2}{2}$

$=-\ln^2 2+\int_1^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^{n-1}}{2^n n}dy$ 注：$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$

$=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n}{2^n n^2}\Big|_1^2$

$=-\ln^2 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2})^n}{n^2}$

$=-\ln^2 2+f(1)-f(\frac{1}{2})$

16.9 设 $S(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases} e^x, & 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ e^{-x}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$，展开为正弦级数的和函数，则 $S(\frac{5\pi}{2})=$ $\underline{-\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}})}$.

奇延拓：在原 $S(x)$ 未定义的 $(-\pi,0)$ 上补全定义，使之变为奇函数.

① 奇延拓，周期为 2π.

② $S(\frac{5\pi}{2})=S(-\frac{\pi}{2})=-S(\frac{\pi}{2})$

③ 狄利克雷收敛定理，有 $S(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f(\frac{\pi}{2}-0)+f(\frac{\pi}{2}+0)]=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}})$

16.11 已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅利叶级数.

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解：(1) $f(x)$ 为偶函数，则 $b_n=0$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2}$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}(e^x+e^{-x})\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\cos nx\,d(e^x-e^{-x})$

$=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}[\cos nx(e^x-e^{-x})\Big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}(e^x-e^{-x})\sin nx\,dx]$

$=(-1)^n+\frac{n}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\sin nx\,d(e^x+e^{-x})$

$=(-1)^n+\frac{n}{e^{\pi}-e^{-\pi}}[\sin nx(e^x+e^{-x})\Big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}(e^x+e^{-x})\cos nx\,dx]$

$=(-1)^n-n^2a_n$

$\Rightarrow a_n=\frac{(-1)^n}{1+n^2}$, $n=0,1,2,\cdots$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx$, $-\pi<x<\pi$

(2) $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{(e^{\frac{\pi}{2}})^2-(e^{-\frac{\pi}{2}})^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos\frac{n\pi}{2}$

$=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{1+(2k)^2}\cdot(-1)^k$

$=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+(2k)^2}$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+(2n)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{2}$.

注：思考如何想到令 $x=\frac{\pi}{2}$.

由 $f(x)$ 幂级数式展开！

16.9 设 $S(x)$ 是 $f(x)=\begin{cases} e^{x}, & 0<x\le\frac{\pi}{2} \\ e^{x}, & \frac{\pi}{2}<x<\pi \end{cases}$ 展开为正弦级数的和函数，则 $S(\frac{3\pi}{2})=$ $\underline{-\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}})}$.

奇延拓：在原 $S(x)$ 未定义的 $(-\pi,0)$ 上补全定义，使之变为奇函数.

① 奇延拓，周期为 2π.

② $S(\frac{3\pi}{2})=S(-\frac{\pi}{2})=-S(\frac{\pi}{2})$

③ 狄利克雷收敛定理，有 $S(\frac{\pi}{2})=\frac{1}{2}[f(\frac{\pi}{2}-0)+f(\frac{\pi}{2}+0)]=\frac{1}{2}(e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}})$

16.11 已知函数 $f(x)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$

(1) 求 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的傅利叶级数.

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+(2n)^2}$ 的和.

解：(1) $f(x)$ 为偶函数，则 $b_n=0$.

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2}$.

$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{x}+e^{-x}}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}(e^{x}+e^{-x})\cos nx\,dx$

$=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\cos nx\,d(e^{x}-e^{-x})$

$=\frac{1}{e^{\pi}-e^{-\pi}}[\cos nx(e^{x}-e^{-x})\big|_0^{\pi}+n\int_0^{\pi}(e^{x}-e^{-x})\sin nx\,dx]$

$=(-1)^n+\frac{n}{e^{\pi}-e^{-\pi}}\int_0^{\pi}\sin nx\,d(e^{x}+e^{-x})$

$=(-1)^n+\frac{n}{e^{\pi}-e^{-\pi}}[\sin nx(e^{x}+e^{-x})\big|_0^{\pi}-n\int_0^{\pi}(e^{x}+e^{-x})\cos nx\,dx]$

$=(-1)^n-n^2a_n$

$\Rightarrow a_n=\frac{(-1)^n}{1+n^2}$， $n=0,1,2,\cdots$

$\therefore f(x)=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos nx$ ， $-\pi<x<\pi$

(2) $f(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^{\frac{\pi}{2}}+e^{-\frac{\pi}{2}}}{(e^{\frac{\pi}{2}})^2-(e^{-\frac{\pi}{2}})^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}=\frac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\cos\frac{n\pi}{2}$

$=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2k}}{1+(2k)^2}\cdot(-1)^k$

$=\frac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{1+(2k)^2}$

$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{1+(2n)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{e^{\frac{\pi}{2}}-e^{-\frac{\pi}{2}}}-\frac{1}{2}$.

注：思考如何想到令 $x=\frac{\pi}{2}$.

由 $f(x)$ 幂级数式展开！

17.6 已知二元函数 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 在 $M(1,1)$ 沿与 x 轴的正向组成 α 角的方向 l 上的方向导数，在怎样的方向上此方向导数有：(1) 最大值，(2) 最小值；(3) 等于0。

解：M 处，$f'_x|_M=2x-y|_M=1$， $f'_y|_M=-x+2y|_M=1$.

$\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial l}=f'_x\cdot\cos\alpha+f'_x\sin\alpha=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})$.

(1) $\sqrt{2}$ (2) $-\sqrt{2}$ (3) 0

17.8 设 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,r)|_{(1,-2,2)}=$ $\underline{\frac{2}{3}}$.

$r'_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r}$ $\cancel{\mathrm{grad}\,r|_{(1,-2,2)}=(\frac{\sqrt{5}}{5},-\frac{2}{5}\sqrt{5},\frac{2}{5}\sqrt{5})}$ $r'_y=\frac{y}{r}$， $r'_z=\frac{z}{r}$.

$r''_{xx}=\frac{1}{r}-\frac{x^2}{r^3}$， $r''_{yy}=\frac{1}{r}-\frac{y^2}{r^3}$， $r''_{zz}=\frac{1}{r}-\frac{z^2}{r^3}$.

$\therefore\mathrm{div}(\mathrm{grad}\,r)|_{(1,-2,2)}=\frac{3}{r}-\frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\Big|_{(1,2,-2)}=\frac{2}{3}$

18.13 设P为椭球面S: $x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点，若S在P点处的切平面与xoy平面垂直，求点P的轨迹C，并计算曲面积分 $I=\iint_\Sigma \frac{(x+\sqrt{3})|y-2z|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$，其中Σ是椭球面S位于曲线C上方的部分.

解: 易知S上任一点的法向量为 $(2x, 2y-z, 2z-y)$.

xoy平面法向量为(0,0,1). $\Rightarrow 2z-y=0$.

$\therefore C\begin{cases}2z-y=0\\x^2+y^2+z^2-yz=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2z-y=0\\x^2+\frac{3}{4}y^2=1\end{cases}$

$\frac{\partial z}{\partial x}$: $2x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial x}=0$.

$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-2x}{2z-y}$

$\frac{\partial z}{\partial y}$: $0+2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}-z-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

$(2z-y)\frac{\partial z}{\partial y}=z-2y$

$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{z-2y}{2z-y}$

$\Rightarrow dS=\sqrt{1+(\frac{\partial z}{\partial x})^2+(\frac{\partial z}{\partial y})^2}=\frac{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}{|y-2z|}$

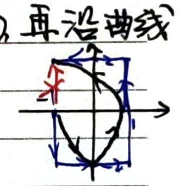
$\therefore I=\iint_{D_{xy}}(x+\sqrt{3})dxdy$, $D_{xy}=\{(x,y)\mid x^2+\frac{3}{4}y^2\le 1\}$

$=0+\sqrt{3}\iint_{D_{xy}}dxdy$

$=0+\sqrt{3}\cdot\pi\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}$

$=2\pi$.

18.17. 计算 $I=\int_L \frac{xdy-ydx}{4x^2+y^2}$，其中L取由点A(-1,0)沿曲线 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 至点B(1,0)，再沿曲线 $y^2=2(1-x)$ 至点C(-1,2)的路径.



解: $P=\frac{x}{4x^2+y^2}$, $Q=-\frac{y}{4x^2+y^2}$. $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-4x^2}{(4x^2+y^2)^2}=\frac{\partial P}{\partial y}$

$\Rightarrow$ I的值与路径无关. $(-1,0)\to(-1,-2)\to(1,-2)\to(1,2)\to(-1,2)$.

注: 不能选 $(-1,0)\to(-1,2)$，因为在 L+CA 围成的区域D内包含(0,0)，但P,Q在(0,0)无定义.

$I=\int_0^{-2}\frac{(-1)dy}{4+y^2}+\int_{-1}^{1}\frac{2dx}{4x^2+4}+\int_{-2}^{2}\frac{dy}{4+y^2}+\int_1^{-1}\frac{(-2)dx}{4x^2+4}$

18.18 设f(x)有二阶连续导数，$f(0)=0$, $f'(0)=1$，且 $[xy(x+y)-f(x)y]dx+[f'(x)+x^2y]dy=0$ 为一全微分方程. 求f(x)及此全微分方程的通解.

↳ $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$ 注: 若P, Q有连续一阶偏导，且Pdx+Qdy是个全微分，则有 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$

18.19 计算: $I=\oint_C(y-z)dx+(z-x)dy+(x-y)dz$，其中C: $\begin{cases}x^2+y^2=1\\x+z=1\end{cases}$ (椭圆). 若从x轴正向看去，C的方向沿顺时针. [柱面坐标代换]

令 $\begin{cases}x=\cos\alpha\\y=\sin\alpha\\z=1-\cos\alpha\end{cases}$, $0<\alpha<2\pi$. $I=\int_0^{2\pi}(2-\sin\theta-\cos\theta)d\theta=4\pi$.

18.22. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma(x^2+y^2)dxdz+zdxdy$，其中Σ为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(z\le 1)$ 在第一卦限部分，方向取下侧.

D_{zx}: $0\le z\le 1$, $0\le x\le z$. D_{xy}: $x^2+y^2\le 1$, $x,y\ge 0$.

$I=\iint_{D_{zx}}z^2dxdz+\iint_{D_{xy}}\sqrt{x^2+y^2}dxdy$