基础知识结构

- 行列式的定义与性质
  - 本质定义（第一种定义）
  - 性质
  - 逆序数法定义（第二种定义）
  - 展开定理（第三种定义）
  - 几个重要的行列式
    - 主对角线行列式
    - 副对角线行列式
    - 拉普拉斯展开式
    - 范德蒙德行列式
- 行列式的计算
  - 具体型
    - 化为基本型
    - 递推法
    - 行列式表示的函数和方程
  - 抽象型
    - 用性质
    - 用公式$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|$
- 余子式与代数余子式的计算

第1讲 行列式

1. 行列式的性质

(1) $|A| = |A^T|$

(2) 一行全为0，则 $|A|=0$.

(3) 一行有公因子k，则可提取.

(4) 一行元素均为两个元素之和，则可拆为两行列式之和。→ 行列式加减法

(5) 两行互换，反号.

(6) 两行相等 or 成比例 $|A|=0$

(7) ⓘ+kⓙ，$|A|$不变　倍加性质

2. 逆序数法

(1) 逆序：$i_s > i_t$ 且 i_s在 i_t前面，则为一个逆序

(2) 逆序数：$\tau(1231546)=3$.

(3) n阶行列式 $= \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} \cdot a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 定义.

3. 余子式：M_{ij}

代数余子式：$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

→ 按行/列展开

4. 几个重要范式

计算 → 上下三角

→ 余子式

(1) 上/下三角（主对角线）

= 主对角线乘积.

(2) 上/下三角（副对角线）

$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$ 副对乘积

(3) 拉普拉斯展开式. A: m阶，B: n阶 → 主副上/下三角推广

$$\begin{vmatrix} A & O \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ C & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

$$\begin{vmatrix} O & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} C & A \\ B & O \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix} = (-1)^{mn} |A||B|$$

(4) 范德蒙行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

例2.1.4 计算n阶行列式.

$$D_n=\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

行/列 → 元素之和相等.

解: $D_n=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}=[a+(n-1)b]\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix}$ 所有列 减1列

2~n行 +至1行

$=[a+(n-1)b](a+b)^{n-1}$

例2.1.7 计算 $D_n=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & 2 \end{vmatrix}$

递推.

解: 先化 $D_n=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots -1 & 2 \end{vmatrix}$

再余子展开 $D_n=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots 2 & -1 \end{vmatrix}$

解: 用余子式 $D_n=2\cdot D_{n-1}+(-1)\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -1 & 2 \end{vmatrix}$

$=D_{n-1}+(-1)^{n+1}\cdot(-1)^{n-1}$

⇒ $S=D_{n-1}+1$.

又∵ $D_1=2$

∴ $D_n=n+1$

2,3,…,n列 + 1列上

$S=\begin{matrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix}$

题2.1.4 计算 $D_{n+1}=\begin{vmatrix} a_1^n & a_1^{n-1}b_1 & a_1^{n-2}b_1^2 & \cdots & a_1b_1^{n-1} & b_1^n \\ a_2^n & a_2^{n-1}b_2 & a_2^{n-2}b_2^2 & \cdots & a_2b_2^{n-1} & b_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n+1}^n & a_{n+1}^{n-1}b_{n+1} & a_{n+1}^{n-2}b_{n+1}^2 & \cdots & a_{n+1}b_{n+1}^{n-1} & b_{n+1}^n \end{vmatrix}$

解: $D_{n+1}=(a_1^na_2^n\cdots a_{n+1}^n)\begin{vmatrix} 1 & \frac{b_1}{a_1} & \frac{b_1^2}{a_1^2} & \cdots & (\frac{b_1}{a_1})^n \\ 1 & \frac{b_2}{a_2} & \frac{b_2^2}{a_2^2} & \cdots & (\frac{b_2}{a_2})^n \\ & \cdots & & & \\ 1 & \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} & \frac{b_{n+1}^2}{a_{n+1}^2} & \cdots & (\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}})^n \end{vmatrix}$ → 转置 — 范德蒙

$=(a_1a_2\cdots a_{n+1})^n\prod_{1\le i<j\le n+1}\left(\frac{b_j}{a_j}-\frac{b_i}{a_i}\right)$

题2.1.8 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是3维列向量, 且 $|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\neq0$, A是3阶矩阵, 满足 $A\alpha_1=\alpha_2-2\alpha_3$, $A\alpha_2=\alpha_1-\alpha_2+2\alpha_3$, $A\alpha_3=2\alpha_1+\alpha_2$. 用矩阵乘积形式

则 $|A|=$ <u>-2</u>.

$A[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3]=[A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3]$

两边取行列式: $|A||\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|=|\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3|\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

$\therefore |A|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}=-2$

基础知识结构

- 矩阵的定义及其基本运算
  - 定义
  - 基本运算
    - 相等
    - 加法
    - 数乘矩阵
    - 矩阵乘法
    - 转置矩阵
    - 向量的内积与正交
    - 施密特正交化
    - 矩阵的幂
    - 方阵乘积的行列式
- 矩阵的逆
  - 定义
  - 性质与公式
  - 用定义法求逆矩阵
- 伴随矩阵
  - 定义
  - 性质与公式
  - 用伴随矩阵求逆矩阵
- 初等变换与初等矩阵
  - 初等变换
  - 初等矩阵
    - 定义
    - 性质与公式
    - 用初等变换（初等矩阵）求逆矩阵
- 矩阵方程
  - $AX=B$
  - $XA=B$
  - $AXB=C$
- 矩阵的秩与等价矩阵
  - 秩
    - 定义
    - 初等变换不改变秩
    - 几个重要式子
  - 等价矩阵

第2讲 矩阵.

1、运算： $ABC=A(BC)$

$AB\neq BA$

2. 逆矩阵： $(A^{-1})^{-1}=A$.

$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$

$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

$(AB)^{T}=B^{T}A^{T}$

$(AB)^{*}=B^{*}A^{*}$

三大运算，穿脱法则

求逆方法 (1) $AB=E$ （定义）.

(2) 令 $A=BC$， $A^{-1}=C^{-1}B^{-1}$

(3) 分块矩阵.

$$\begin{bmatrix}A&0\\0&B\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}A^{-1}&0\\0&B^{-1}\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&A\\B&0\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}0&B^{-1}\\A^{-1}&0\end{bmatrix}$$

(4) $(A|E)\to(E|A^{-1})$.

3. 伴随矩阵

(1) 定义 $A^{*}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{bmatrix}$ 注意行列！

(2) 公式： ① $A\cdot A^{*}=|A|E$ （A可用 A^{T}，A^{-1}，A^{*} 代入）

② $|A^{*}|=|A|^{n-1}$

③ $(A^{*})^{*}=|A|^{n-2}\cdot A$

(3) 求逆： $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot A^{*}$

4. 初等变换与初等阵.

(1) 初等变换：将E 倍乘、互换 或 倍加.（一次）

$E_{2}(k)$ E_{23} $E_{23}(k)$：3行×k加到2行

(2) 性质：

① 所有初等阵均可逆

行列式：$|E_{ij}|=-1$ $|E_{ij}(k)|=1$ $|E_{i}(k)|=k$

转置：$E_{ij}^{T}=E_{ij}$ $E_{ij}^{T}(k)=E_{ji}(k)$ $E_{i}^{T}(k)=E_{i}(k)$

求逆：$E_{ij}^{-1}=E_{ij}$ $E_{ij}^{-1}(k)=E_{ij}(-k)$ $E_{i}^{-1}(k)=E_{i}(\frac{1}{k})$.

伴随：$E_{ij}^{*}=-E_{ij}$ $E_{ij}^{*}(k)=E_{ij}(-k)$ $E_{i}^{*}(k)=kE_{i}(\frac{1}{k})$.

② A可逆，则A可写为 $A=P_1P_2\cdots P_n$，其中 P_i 是初等阵.

③ 左行右列定理： $\underset{\text{行}}{P}A\underset{\text{列}}{Q}$.

(3) 求逆： $(A:E)\xrightarrow{\text{行变换}}[E:A^{-1}]$

A经过n次初等变换得到B
→ 多次初等变换

5. 等价矩阵和等价标准型

(1) 等价矩阵：A、B是 m×n 矩阵，存在可逆矩阵 $P_{m\times m}$，$Q_{n\times n}$，使 $PAQ=B$，
则 $A\cong B$.

(2) $A_{m\times n}\cong\underbrace{\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}_{\text{等价标准型}}$，$r=r(A)$，即 $PAQ=\begin{bmatrix}E_r & 0\\0 & 0\end{bmatrix}$

6. 秩.

(1) 定义：非k阶子式不为0，∀(k+1)阶子式为0，$r(A)=k$.
⇒ 线性无关组数.

(2) 初等变换不改变矩阵的秩.
⟺ 可逆阵 ⟺ 满秩

eg. $r(A)=r(PA)=r(AP)=r(PAQ)$
P.Q可逆.

(3) 重要式子：
$A_{m\times n}$，B满足运算要求.

① $0\le r(A)\le\min\{m,n\}$.

② $r(kA)=r(A)$ $(k\ne0)$

③ $r(AB)\le\min(r(A),r(B))$

④ $r(A+B)\le r(A)+r(B)$.

⑤ $r(A^*)=\begin{cases}n, & r(A)=n\\1, & r(A)=n-1\\0, & r(A)<n-1\end{cases}$，A为n阶方阵 — $|A^*|=|A|^{n-1}\ne0$，⇒ 满秩(可逆).
— $|A|=0\Rightarrow A\cdot A^*=|A|E=0\Rightarrow r(A)+r(A^*)\le n$.
$\Rightarrow r(A^*)=n-1$
A的∀(n-1)阶子式为0
$\Rightarrow A_{ij}=0\Rightarrow A^*=0\Rightarrow r(A^*)=0$

⑥ $A\cdot B=0$. $r(A)+r(B)\le n$.

⑦ $r(A)+r(B)\le\min\{m,n\}$.

只有0的秩才为0.

7. 施密特正交化：由~~两个~~一组线性无关向量找出一组基底(正交).

① 线性无关向量：$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$.

② 基底(正交)：$\begin{cases}\beta_1=\alpha_1\\ \beta_2=\alpha_2-\dfrac{(\alpha_2,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1\\ \beta_3=\alpha_3-\dfrac{(\alpha_3,\beta_1)}{(\beta_1,\beta_1)}\beta_1-\dfrac{(\alpha_3,\beta_2)}{(\beta_2,\beta_2)}\beta_2\end{cases}$

$\gamma_1=\dfrac{\beta_1}{|\beta_1|}$，$\gamma_2=\dfrac{\beta_2}{|\beta_2|}$，$\gamma_3=\dfrac{\beta_3}{|\beta_3|}$ (单位化)

补充：① 对称矩阵：$A^T=A$
② 正交矩阵：$A\cdot A^T=E$.
③ 对角方阵的逆：主对角线元素取倒数.
④ A,B同型，A等价于B ⟺ $r(A)=r(B)$　注：等价是由可逆矩阵乘来的，而可逆阵不改变原式的秩.

题型.

1、求 A^n. ① $\alpha^T\beta$ 型（A方阵）. $r=1$

② $A=E+B$，二项展开（$B^n=0$）

③ 规律，eg. $A^2=E$，一般是稀疏的.

2. 求 A^{-1} ① $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}$

② $(A|E)\xrightarrow{行变}(E|A^{-1})$. } 具体型

③ 化A为A-E（若求 $(A-E)^{-1}$）→ 抽象型，一个字:"凑"

④ 分块矩阵

3. 求伴随：n大公式运用 eg. $AA^*=|A|E$，$|A^*|=|A|^{n-1}$，$|(A^*)^*|=|A|^{n-2}$

4. 初等阵：左行右列定理 + 初等阵的行列式 逆，转置，伴随

5. 秩与等价：秩 { 一定义，∃k阶子式≠0，∀(k+1)阶子式=0；线性相关数

(0,0,0) 向量子秩无加减

一重要公式定理 eg. $r(A+B)\leq r(A)+r(B)$

$r(A^*)=\begin{cases} n, & r(A)=n \\ 1, & r(A)=n-1 \\ 0, & r(A)<n-1 \end{cases}$

一运用初等阵. 注：初等阵可逆，A·可逆阵秩不变.

等价：$A\boxed{可逆阵}=B$. ⟺ $A\cong B$.

初等阵堆积.

勿讲好题：例2.2.3，2.6，2.11（难），2.16，2.20（有妙法），习题：2.2.1，2.5，2.9（推，化简）

基础知识结构

- 向量与向量组的线性相关性
  - 向量定义
  - 线性组合
  - 线性表出
    - 能表出
    - 不能表出
  - 线性相关性
    - 相关
    - 无关
  - 判别的七大定理
- 极大线性无关组与向量组的秩
  - 极大无关组
    - 定义
    - 求法
  - 向量组的秩
    - 定义
    - 重要定理和公式
- 等价向量组
  - 定义
  - 判别
  - 与等价矩阵的区别
- 向量空间（仅数学一要求）
  - 概念
    - 基
    - 坐标
    - 维数
  - 基变换与坐标变换
    - 变换公式
    - 过渡矩阵

第3讲 向量组

1. 线性组合： 向量 $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

线性表出： $\beta=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m$

线性相关： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ 的 k 有非零解 零向量、成比例向量

线性无关： $k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m=0$ k 仅有零解

2. $AX=0$ 有非零解 $\Leftrightarrow |A|=0 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性相关

$AX=0$ 仅有零解 $\Leftrightarrow |A|\neq 0 \Leftrightarrow \alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关

3. 极大线性无关组：

等价向量组：两向量组可以互相线性表出

4. 向量组 ① 三秩相等

② $A \xrightarrow{行} B$ 行向量组是等价向量组；对应列向量组有相同的线性相关性

③ β组可由α组线性表出： $r(\beta)\le r(\alpha)$

5. 向量空间（数一）

① 基变换： $[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]C$ → (可逆矩阵) 过渡矩阵

基1 基2

② 坐标变换 $\alpha=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]x=[\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n]y$

$=[\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n]Cy$

$\Rightarrow x=Cy$ 或 $y=C^{-1}x$

30讲：例2.3.6

基础知识结构

- 具体型线性方程组
  - 齐次
    - 有解条件
    - 解的性质
    - 基础解系和解的结构
    - 求解方法与步骤
  - 非齐次
    - 有解条件
    - 解的性质
    - 求解方法与步骤
- 抽象型线性方程组
  - 有解条件与解的判定
  - 解的结构
  - 基础解系的讨论
  - 系数矩阵列向量与解的关系
- 两个方程组的公共解
- 同解方程组

第4讲 线性方程组

1. 齐次线性方程组 $AX=0$.

(1) 有解的条件:

① $r(A)=n$ (满秩), 方程组仅有零解, A线性无关

② $r(A)<n$ (不满), 方程组有非零解, A线性相关

且有 $n-r$ 个无关解 → 基础解系个数.

(2) ① $A \xrightarrow{行} B$ (行阶梯形)

判断解的情况 ② 找到找出一个秩为r的子矩阵, 剩余列位置的未知数即为自由变量.

③ 写出基础解系, 通解

$S=n-R$

自由变量数 秩

2. 非齐次线性方程组 $AX=\beta$.

① 先解 $AX=0$ 通解 ξ

② 写出 $AX=\beta$ 一个特解 η

③ $AX=\beta$ 通解为 $k\xi+k\eta$.

解的情况: ① $r(A)\neq r(A|\beta)$, 无解

② $r(A)=r(A|\beta)=n \iff \beta$ 可由 α 系唯一表示

$r(A)=r(A|\beta)<n \iff \beta$ 可由 α 系无穷多种表示

3. 方程组有解的条件及解的判别

~~1) $AX=0$, 至少有0解.~~

(2) $A_{m\times n}X=0$, $\begin{cases} r(A)=n, 仅有零解 \\ r(A)<0, 无穷多解 \end{cases}$

(3) $A_{m\times n}X=B$, $\begin{cases} r(A)\neq r(A|B), 无解 \\ r(A)=r(A|B)=n 唯一解 \\ r(A)=r(A|B)=r<n, 无穷多解 \end{cases}$

3) 讲: 习题 2.4.1, 4.3, 6.6

基础知识结构

- 特征值与特征向量
  - 定义
  - 性质
  - 求法
    - 具体型矩阵
    - 抽象型矩阵
- 相似
  - 矩阵相似
    - 定义
    - 性质
  - 矩阵的相似对角化
    - 定义
    - 可相似对角化的条件
      - 两个充分
      - 两个充要
    - 相似对角化的步骤
  - 应用
    - 实对称矩阵的相似对角化
    - 反问题
      - 反求参数
      - 反求$\boldsymbol{A}$
    - 求$\boldsymbol{A}^n$与$f(\boldsymbol{A})$

第5讲 特征值与特征向量

1. 定义：$A\xi=\lambda\xi$ λ：特征值 ξ：特征向量

$\Rightarrow \underbrace{(\lambda E-A)}_{\text{特征矩阵}}\xi=0$. 特征方程.

$|\lambda E-A|$：特征多项式

2. 基本性质：

① λ之和为迹 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=tr(A)$

② λ之积为$|A|$ $\prod_{i=1}^{n}\lambda_i=|A|$

③ k重特征值λ至多有k个线性无关的特征向量

④ 若ξ_1,ξ_2是A的属于不同特征值λ_1,λ_2的特征向量，则ξ_1,ξ_2线性无关.

⑤ 若ξ_1,ξ_2是A的属于同一特征值λ的特征向量，则$k_1\xi_1+k_2\xi_2$仍为特征向量.
(k_1,k_2不同为0)

3. 矩阵的相似.

(1) 定义：若P可逆，$P^{-1}AP=B$，则$A\sim B$.

(2) 相似矩阵的性质.

① 若$A\sim B$，则 $r(A)=r(B)$，$|A|=|B|$，$|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$，A、B有相同特征值，$tr(A)=tr(B)$

② 若$A\sim B$，则$f(A)\sim f(B)$ (eg. $A^m\sim B^m$)

③ 若$A\sim B$且A可逆，则$A^{-1}\sim B^{-1}$，$f(A^{-1})\sim f(B^{-1})$.

④ 若$A\sim B$，则$A^T\sim B^T$

⑤ 若$A\sim B$且A可逆，则$A^*\sim B^*$

4. 矩阵的相似对角化.

(1) 定义：$P^{-1}AP=\underbrace{\Lambda}_{\text{对角阵}}$ (相似标准形) $\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$

(2) 可相似对角化的条件.

充要 ① A有n个线性无关的特征向量.
② A对应每个k_i重特征值都有k_i个线性无关特征向量.

充分 ① n阶阵A有n个不同的特征值
② n阶阵A为实对称矩阵. — 属于不同特征值的特征向量必正交.
— 必有n个线性无关ξ，使$P=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$.
$P^{-1}AP=\Lambda=\begin{bmatrix}\lambda_1&&&\\&\lambda_2&&\\&&\ddots&\\&&&\lambda_n\end{bmatrix}$，存在正交矩阵Q，
使$Q^{-1}AQ=Q^TAQ=\Lambda$ (A正交相似于Λ).

30讲. 例2.5.9，2.5.23，习题2.5.7

P378，注：试根法解高阶方程.

①常试 $f(\pm1)$，$f(0)$.

②若系数均为整数，则 $f(\lambda)=0$ 的有理根也是整数，且为 a_0 的因子.

eg. $\lambda^3-3\lambda^2-6\lambda+8=0$

试根 $f(1)=0$，则 $\lambda^2(\lambda-1)-2\lambda(\lambda-1)-8(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda^2-2\lambda-8)=0$

$\Rightarrow (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda+2)=0.$

P384.1）判断一个矩阵是否相似于对角矩阵的步骤如下.

① 是否为实对称矩阵

② 是否为实单根.（特征值）

③ 特征值 r 重根 <
- r 个线性无关的特征向量：能
- 少于 r 个线性无关的特征向量：不能

2）满秩 $\Leftrightarrow$ 可逆 $\Leftrightarrow$ 线性无关 $\Leftrightarrow$ 行列式不为0.

P392. $A\sim B=\Lambda$ 时，$P^{-1}f(A)P=f(\Lambda)\Rightarrow f(A)=P\begin{bmatrix}\lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n\end{bmatrix}P^{-1}.$

好多纸

2.5.11 已知 $A=\begin{bmatrix}2&x&1\\0&3&0\\3&-6&0\end{bmatrix}$ 能相似于对角矩阵 求 A^{100}.

解：$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-x&-1\\0&\lambda-3&0\\-3&6&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda-2)(\lambda-3)-3(\lambda-3)$
$=(\lambda-3)^2(\lambda+1)=0.$

$\therefore \lambda_1=-1,\ \lambda_2=\lambda_3=3.$

要 $A\sim\Lambda$，则 $r(3E-A)=1$.（$s=n-r$，s要为2）.

$3E-A=\begin{pmatrix}1&-x&-1\\0&0&0\\-3&6&3\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1&-x&-1\\0&1&0\\0&6-3x&0\end{bmatrix}\Rightarrow 6-3x=0.$
$x=2.$

① $\lambda_2=\lambda_3=3$ 时，~~x=2时~~

$(3E-A)\xi_{2,3}=0.\Rightarrow x_1-2x_3-x_3=0.$

$\therefore \xi_2=(1,0,1)^T.\quad \xi_3=(2,1,0)^T.$

② $\lambda_1=-1$ 时.

$(-E-A)\xi_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}-3&-2&-1\\0&-4&0\\-3&6&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=0\Rightarrow\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=0.\\-4x_2=0\\-3x_1+6x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_2=0\\x_3=-3x_1\end{cases}$

令 $\xi_1=(1,0,-3)^T$

则令 $P^{-1}AP=\Lambda$，$P=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&1\\-3&1&0\end{bmatrix}$，$\Lambda=\begin{bmatrix}-1&&\\&3&\\&&3\end{bmatrix}$.

$\therefore A^{100}=P\Lambda^{100}P^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&1\\-3&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}(-1)^{100}&&\\&3^{100}&\\&&3^{100}\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&1&2\\0&0&1\\-3&1&0\end{bmatrix}^{-1}}_{=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&-2&-1\\1&-1&3\\0&4&1\end{pmatrix}}$

好多纸

基础知识结构

- 二次型的定义与矩阵表示
- 化二次型为标准形与规范形
  - 配方法
  - 正交变换法
  - 合同
  - 惯性定理
- 正定二次型
  - 定义
  - 充要条件
  - 必要条件
  - 判定
    - 具体型二次型
    - 抽象型二次型

第6讲 二次型

1. 二次型：二次齐次多项式

$f(x) = x^T A x$　　A：对称矩阵，称为"二次型的矩阵"

$(A^T = A)$

系数矩阵A的秩就是二次型$f(x)$的秩.

2. 合同变换、合同标准型、规范形

(1) 若 $x = Cy$，则 $f(x) = (Cy)^T A Cy = y^T(C^TAC)y = y^T B y = g(y)$.

(2) 合同：$C^TAC = B$，$A \simeq B$.

$f(x)$与$g(y)$合同二次型.

(3). 标准形：二次型中只含有平方项，没有交叉项.　　$A \xrightarrow{合同} B$（标准形），B为A的合同标准形.

eg. $d_1x_1^2 + d_2x_2^2 + d_3x_3^2 + \cdots + d_nx_n^2$.

(4) 规范形：d_i仅为0，±1的二次型.　　$A \xrightarrow{合同} B$（规范形），B为A的合同规范形.

eg. $x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$

3. 惯性定理

(1) $A \xrightarrow{线性变换} B$：p（正项个数）～正惯性指数

q（负项个数）～负惯性指数.

4. 正定二次型.

(1) $f(x) = x^TAx$ 对任意的 $x = [x_1, x_2, \cdots, x_n]^T \neq 0$，均有 $x^TAx > 0$，则称f为正定二次型

A：正定矩阵

(2) f 正定充要条件：

$f = x^TAx$ 正定 $\Leftrightarrow$ $\forall x \neq 0$，有 $x^TAx > 0$.

$\Leftrightarrow$ f 正惯性指数 $p = n$.

$\Leftrightarrow$ ∃可逆阵D，使 $A = D^TD$.

$\Leftrightarrow$ $A \simeq E$　　A与E合同，$C^TAC = E$

$\Leftrightarrow$ A的特征值 $\lambda_i > 0$

$\Leftrightarrow$ A的全部顺序主子式均大于0.

左上角依次取，1×1，2×2，3×3

(3) f 正定必要条件

① $a_{ii} > 0$

② $|A| > 0$.

例2.6.2 将二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+x_1x_3-x_2x_3$化为规范形，并求所用的可逆线性变换.

配方法

解：没有平方项时，可令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，使其出现平方项.

令$\begin{cases}x_1=y_1+y_2\\x_2=y_1-y_2\\x_3=y_3\end{cases}$，$f=y_1^2-y_2^2+y_1y_3+y_2y_3-y_1y_3+y_2y_3$

$=y_1^2-(y_2-y_3)^2+y_3^2$

令$\begin{cases}z_1=y_1\\z_2=y_2-y_3\\z_3=y_3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y_1=z_1\\y_2=z_2+z_3\\y_3=z_3\end{cases}\Rightarrow f=z_1^2-z_2^2+z_3^2$（规范形）.

$x=Cz$

由上可知x与z的关系$\begin{cases}x_1=z_1+z_2+z_3\\x_2=z_1-z_2-z_3\\x_3=z_3\end{cases}\Rightarrow C=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$

$\because |C|=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq0.$

$\therefore x=Cz$是可逆线性变换.

例2.6.3 用正交变换化二次型f为标准形，并求所作的正交变换.

（正交矩阵法）

$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+5x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-4x_1x_3-8x_2x_3.$

① 求特征值、特征向量
② 正交化、单位化，得C.
③ 得f标准型

解：用正交变换求，先求λ、ξ

系数阵 $A=\begin{bmatrix}2&2&-2\\2&5&-4\\-2&-4&5\end{bmatrix}$，$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-2&2\\-2&\lambda-5&4\\2&4&\lambda-5\end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_1=\lambda_2=1.\ \lambda_3=10.$

$\lambda_1=\lambda_2=1$时，$(E-A)x=0\Rightarrow\xi_1,\xi_2.$

$\lambda_3=10$时，$(10E-A)x=0\Rightarrow\xi_3.$

将ξ_1,ξ_2,ξ_3标准正交化.

①先将ξ_1,ξ_2正交化. $\begin{cases}\eta_1=\xi_1\\\eta_2=\xi_2-\dfrac{(\xi_2,\eta_1)}{(\eta_1,\eta_1)}\eta_1\\\xi_3\end{cases}$

②再将η_1,η_2,η_3单位化. $\eta_1^0,\eta_2^0,\eta_3^0$

$Q=(\eta_1^0,\eta_2^0,\eta_3^0)$

$f(x_1,x_2,x_3)\xlongequal{x=Qy}y^TQ^TAQy=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2$

加讲 例2.6.5（5个方法）. 2.6.8 . 2.6.9