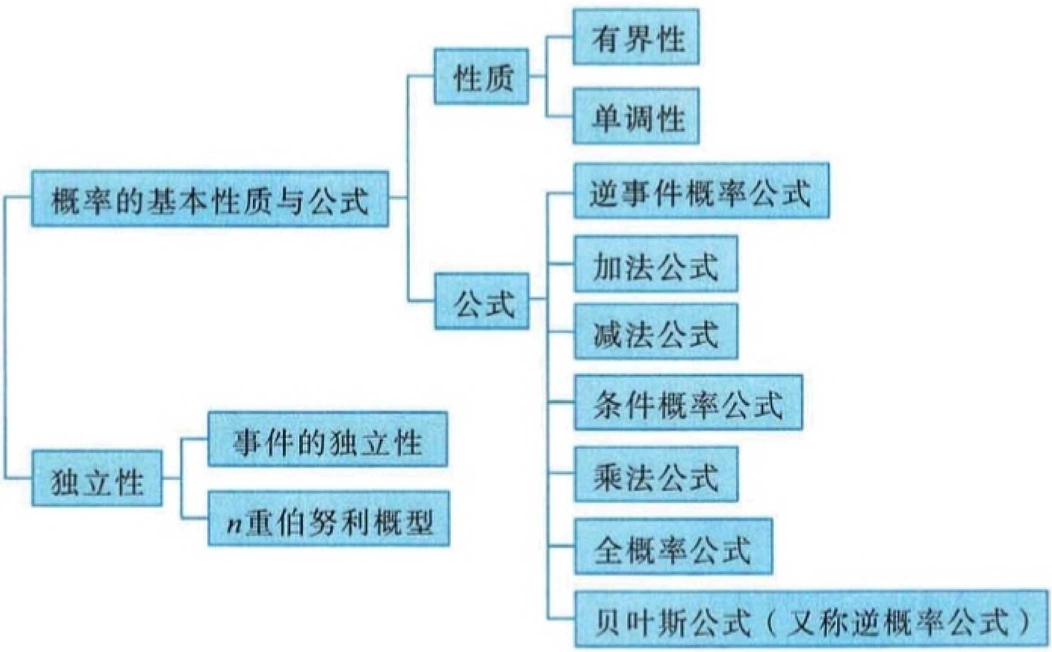
基础知识结构

- 基本概念
  - 随机试验
  - 随机事件
  - 样本空间
- 事件的关系与运算
  - 关系
    - 包含
    - 相等
    - 相容
    - 对立
  - 运算
    - 和（并）
    - 差
    - 积（交）
    - 运算法则
      - 吸收律
      - 交换律
      - 结合律
      - 分配律
      - 对偶律（德·摩根律）
- 概率的定义
  - 描述性定义
  - 统计性定义
  - 公理化定义
- 古典概型和几何概型
  - 古典概型
    - 数数法
    - 随机分配
    - 简单随机抽样
  - 几何概型



概率的基本性质与公式
性质
有界性
单调性
公式
逆事件概率公式
加法公式
减法公式
条件概率公式
乘法公式
全概率公式
贝叶斯公式（又称逆概率公式）
独立性
事件的独立性
n重伯努利概型

第1章 随机事件与概率

1、事件的关系与运算

$A\cup B$　　$A-B$　　AB

$B\subset A$　　$\bar{A}$ (对立)　　$AB=\phi$ (互斥)

2、运算法则

(1) 吸收律：若$A\subset B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$

(2) 交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$

(3) 结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(4) 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$

(5) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$，$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

(德·摩根律)

顺序：先逆，后交，再并或差。

3、古典概型和几何概型

(1) 古典概型：基本事件有限，等可能

(2) 几何概型：基本事件无限，等可能。

4、概率的基本性质与公式

(1) $P(A)+P(\bar{A})=1$

(2) 加法公式：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$　(见文氏图)

(3) 减法公式：$P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A\bar{B})$　(见文氏图)

(4) 条件概率公式(已知A发生，B发生的概率)：

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

注：$P(\cdot|A)$是概率，概率的一切性质和重要结论对其均适用。

eg. $P(\bar{B}|A)=1-P(B|A)$.

$P(B-C|A)=P(B|A)-P(BC|A)$.　当作没有 $|A$，即$(B|A)$当作B来化.

(5) 乘法公式：

$$P(AB)=P(B|A)\cdot P(A)\quad (P(A)>0).$$

推广 → $P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1})$

(6) 全概率公式　记意蕴，形式无用

若 $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=\Omega$，$A_iA_j=\phi\ (i\neq j)$，$P(A_i)>0$，则有 $B=\bigcup_{i=1}^{n}A_iB$，$P(B)=\sum_{i=1}^{n}P(A_iB)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)$

(7) 贝叶斯公式：（逆概率公式）

若 $\bigcup A_i=\Omega$，$A_iA_j=\emptyset\ (i\neq j)$，$P(A_j)>0$. 则若 $P(B)>0$，则有

$$P(A_i|B)=\frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B|A_i)}$$

分子 → 乘法公式

分母 → 全概率公式

$\Leftrightarrow P(A_i|B)\cdot P(B)=P(A_i)P(B|A_i)$

$\Leftrightarrow P(A_iB)=P(A_iB)$.

5. 事件的独立性和独立重复试验.

(1) 独立：~~互相独立~~ 两两

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}P(AB)=P(A)P(B)\\P(AC)=P(A)P(C)\\P(BC)=P(B)P(C)\end{array}\right\}\\P(ABC)=P(A)P(B)P(C).\end{array}\right\}\Rightarrow A,B,C\ \text{~~两两~~ 互相独立.}$$

$A\cap B=\phi \Leftrightarrow AB$ 互斥

(2) 独立试验序列概型

在同样条件下独立重复地进行一系列完全相同的试验.

(3) n重伯努利概型

n次，仅有 A 与 $\bar{A}$，$P(A)=p$.

补：① $C_n^m=\frac{P_n^m}{m!}$ → 排列数.

组合数

② A发生必导致B发生 ⟺ B包含A ⟺ $A\subset B$.

③ n重伯努利 $P(X=k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$ （射击事件）.

例3.1.17. 每箱产品有10件，其次品数从0到2是等可能的，开箱检测时从中任取1件，如检验出是次品，则认为产品不合格而拒收。假设由于检验有误，将1件正品误认为次品的概率为2%，1件次品被漏查而判为正品的概率为5%，<u>通过验收的概率为多少？</u>

解： ①箱中次品个数为0,1,2 　　　　　　　　　　　　全概率公式

②通过验收 在正确判断和错误判断下发生． 　　　　　　↓

A_i：箱中有i个次品， B：通过验收 　B_i：抽取正品． 　　列出来所有可能情况．

$P(A_i)=\frac{1}{3}$． 　$P(B_i|A_i)=\frac{10-i}{10}$

$P(B_i)=\sum_{i=0}^{2}P(A_i)P(B_i|A_i)=\frac{1}{3}(1+\frac{9}{10}+\frac{8}{10})=\frac{9}{10}$

$P(B)=P(B_i)\cdot\underbrace{0.98}_{P(B|B_i)}+P(\bar{B_i})\cdot\underbrace{5\%}_{P(B|\bar{B_i})}=?$

基础知识结构

- 一维随机变量
  - 概念
  - 分布函数
    - 概念
    - 性质
    - 应用——求概率
- 一维离散型随机变量
  - 分布律
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 五大分布
    - 0-1分布$B(1,p)$
    - 二项分布$B(n,p)$
    - 泊松分布$P(\lambda)$
    - 几何分布$G(p)$
    - 超几何分布$H(n,N,M)$
- 一维连续型随机变量
  - 概率密度
  - 性质
  - 应用——求概率
  - 三大分布
    - 均匀分布
    - 指数分布
    - 正态分布
- 一维随机变量函数的分布
  - 离散型→离散型
  - 连续型→连续型（混合型）

第2讲 一维随机变量与其分布

1、分布函数

① $F(x)=P(X\le x)$ ，$X\sim F(x)$

② $F(x)\uparrow$. $F(-\infty)=0$, $F(+\infty)=1$.

2. 两类随机变量

(1) 离散型随机变量. $\Leftrightarrow p_i\ge 0$, $\sum p_i=1$

X	x_1	x_2	…
P	p_1	p_2	…

$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P(x_i)$

(2) 连续型随机变量 $\Leftrightarrow f(x)\ge 0$, $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$

$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt$

↳ 概率密度函数.

3. 常见的随机变量分布类型.

(1) 离散型.

① 0-1分布，$P\{X=1\}=P$，$P\{X=0\}=1-P$，$X\sim B(1,p)$.

② 二项分布，$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$，$X\sim B(n,p)$

③ 泊松分布，$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$，$X\sim P(\lambda)$

④ 几何分布，$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p$，$X\sim G(p)$

A首次发生需要的次数k

⑤ 超几何分布，$P\{X=k\}=\frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ ($\max\{0,n-N+M\}\le k\le\min\{M,n\}$，$M\le N$，$n\le N$).

意义P(k)，总N，不合格M，抽n，k个不合格 $X\sim H(n,N,M)$

(2) 连续型

① 均匀分布 $U(a,b)$.

② 指数分布 $E(\lambda)$ $X\sim E(\lambda)$

$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0\\ 0, & 其他\end{cases}$ $F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $(\lambda>0)$

③ 正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$ $(-\infty<x<+\infty)$

$f(x)_{max}=f(\mu)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$

$\mu=0,\sigma=1\Rightarrow N(0,1)$ 标准正态分布

$N(0,1)$下，$P\{X>\mu_\alpha\}=\alpha$，μ_α为$N(0,1)$的上侧α分位点

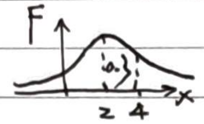
4. 连续型一维随机变量函数.

$Y=g(X)$

则 $F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{g(X)\le y\}=\int_{g(x)\le y}f_X(x)dx$

例3.2.8 设 $X\sim N(2,\sigma^2)$，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，求 $P\{X<0\}$.

解：法一：



易知 $P\{0<X<2\}=P\{2<X<4\}=0.3$

$\therefore P\{X<0\}=\frac{1}{2}(1-P\{0<X<2\}-P\{2<X<4\})$

$=0.2$

法二：$P\{2<X<4\}=\Phi(\frac{4-2}{\sigma})-\Phi(\frac{2-2}{\sigma})$ $\Phi(\frac{X-\mu}{\sigma})$

$=\Phi(\frac{2}{\sigma})-\Phi(0)$ → 一半

$=\Phi(\frac{2}{\sigma})-0.5$

$=0.3$.

$\therefore \Phi(\frac{2}{\sigma})=0.8$. $P\{X<0\}=\Phi(\frac{0-2}{\sigma})=\Phi(-\frac{2}{\sigma})=1-\Phi(\frac{2}{\sigma})=0.2$.

例3.2.17. 设随机变量 $X\sim N(2,2^2)$，且 $aX+b\sim N(0,1)$，则 a,b 取值为 $\frac{1}{2},-1$ 或 $-\frac{1}{2},1$

法一：标准化. $\pm\frac{X-2}{2}\sim N(0,1)$.

法二：正态分布参数与其数字特征的关系.

$E(aX+b)=aEX+b=2a+b=0$

$D(aX+b)=a^2DX=4a^2=1$

3.2.8 设随机变量X的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{2}, & 0\le x<1\\ 1-e^{-x}, & x\ge 1\end{cases}$，则 $P\{0\le X\le 1\}=$ $1-e^{-1}$，$P\{0<X<1\}=$ 0.

(易错题).

$P\{0\le X\le 1\}=P\{X\le 1\}-P\{X<0\}=(1-e^{-1})-0$

$P\{0<X<1\}=P\{X<1\}-P\{X\le 0\}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$

3.2.15. 设随机变量X的概率密度为

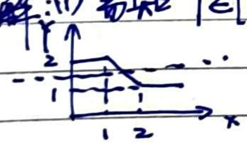
$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3\\ 0, & 其他.\end{cases}$

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1\\ X, & 1<X<2\\ 1, & X\ge 2.\end{cases}$

(1) 求Y的分布函数.

(2) 求概率 $P\{X\le Y\}$

解：(1) 易知 $Y\in[1,2]$



$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\begin{cases}0, & y<1\\ 1, & y\ge 2\\ ?, & 1\le y<2.\end{cases}$

$1\le y<2$ 时，$P\{Y\le y\}=P\{Y=1\}+P\{1<Y\le y\}$

$=P\{X\ge 2\}+P\{1<X\le y\}$

$=\int_2^3 f(x)dx+\int_1^y f(x)dx$

(2) $P\{X\le Y\}=P\{X<2\}$

$=\int_0^2 \frac{x^2}{9}dx$

基础知识结构

- 二维（n维）随机变量
  - 概念
  - 联合分布函数
    - 概念
    - 性质
  - 边缘分布函数
- 二维离散型随机变量
  - 联合分布律
  - 边缘分布律
  - 条件分布律
- 二维连续型随机变量
  - 联合概率密度
  - 边缘概率密度
  - 条件概率密度
  - 二维均匀分布
  - 二维正态分布
- 独立性
  - 概念
  - 相互独立的充要条件
    - $F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$
    - $p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j}$
    - $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$
  - 性质
- 函数的分布
  - （离散型，离散型）→离散型
  - （连续型，连续型）→连续型
    - 分布函数法
    - 卷积公式
  - （离散型，连续型）→连续型
    - 全概率公式

第3讲 多维随机变量及其分布.

1. 联合分布函数 $(X,Y) \sim F(x,y)$

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\}$$

① 有界 $F(-\infty,y) = F(x,-\infty) = F(-\infty,-\infty) = 0$

$F(+\infty,+\infty) = 1$

② 非负性 $P\{x_1 < X \le x_2, y_1 < Y \le y_2\} = F(x_2,y_2) - F(x_2,y_1) - F(x_1,y_2) + F(x_1,y_1) \ge 0.$

2. 边缘分布函数.

$F_X(x) = F(x,+\infty)$

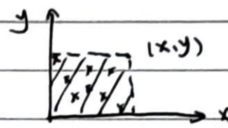
$F_Y(y) = F(+\infty,y).$

3. 二维随机分布

(1) 离散型

① 联合分布函数

$$F(x,y) = P\{X \le x, Y \le y\} = \sum_{x_i \le x}\sum_{y_j \le y} p_{ij}$$
$$= P\{(X,Y) \in G\} = \sum_{(x_i,y_j) \in G} p_{ij}$$



② 边缘分布

$p_{i\cdot} = P\{X=x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} \quad (i=1,2,\cdots)$

$p_{\cdot j} = P\{Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} P\{X=x_i, Y=y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} \quad (j=1,2,\cdots)$

③ 条件分布

$P\{X=x_i \mid Y=y_j\} = \dfrac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}} = \dfrac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} \quad (i=1,2,\cdots)$ 条件 $=\dfrac{\text{联合}}{\text{边缘}}$

$P\{Y=y_j \mid X=x_i\} = \dfrac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} \quad (j=1,2,\cdots)$

(2) 连续型

① 概率密度

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv, \quad (x,y) \in R^2$

有 $f(x,y) \ge 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1.$

② 联合分布函数

$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv = \iint_G f(x,y)\,dx\,dy$

$\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y)$

③ 边缘概率密度

$F_X(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,dv\right]du.$ $F_Y(y) = F(+\infty,y)$

$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy$ $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$

④ 条件概率密度.

$f_{Y|X}(y|x) = \dfrac{f(x,y)}{f_X(x)}$

$f_{X|Y}(x|y) = \dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}$ $f(x,y) = f_X(x) f_{Y|X}(y|x) = f_Y(y) f_{X|Y}(x|y)$

条件 $=\dfrac{\text{联合}}{\text{边缘}}$

4. 常见的二维分布

☆ (1) 二维均匀分布 $(X,Y)\sim f(x,y)$

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{S_D}, & (x,y)\in D\\ 0, & 其他\end{cases}$$

(2) 二维正态分布 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$

$$\begin{cases}EX=\mu_1 & EY=\mu_2\\ DX=\sigma_1^2 & DY=\sigma_2^2\\ \rho_{XY}=\rho\end{cases}$$

$aX+bY\sim$ 正态

X、Y 不相关(独立) $\sim \rho=0$

5. 独立性

X、Y 独立 $\Leftrightarrow F(x,y)=F_X(x)\cdot F_Y(y)$

$\Leftrightarrow f(x,y)=f_X(x)\cdot f_Y(y)$

$\Leftrightarrow P_{ij}=P_{i\cdot}\cdot P_{\cdot j}$

6. 多维随机变量函数的分布

(1) 和的分布 $Z=X+Y$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$

$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(z-y)f_Y(y)dy$ ~ 卷积公式

(2) 差的分布 $Z=X-Y$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f(y+z,y)dy$

$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(x-z)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(y+z)f_Y(y)dy$

(3) 积的分布 $Z=XY$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f(x,\frac{z}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f(\frac{z}{y},y)dy$

$\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|x|}f_X(x)f_Y(\frac{z}{x})dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|y|}f_X(\frac{z}{y})f_Y(y)dy$

(4) 商的分布 $Z=\frac{X}{Y}$

$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f(yz,y)dy\xlongequal{独立}\int_{-\infty}^{+\infty}|y|f_X(yz)f_Y(y)dy$

(5) $\max\{X,Y\}$ 分布函数

$F_{max}(z)=F(z,z)\xlongequal{独立}F_X(z)F_Y(z)$

(6) $\min\{X,Y\}$ 分布函数

$F_{min}(z)=F_X(z)+F_Y(z)-F(z,z)$

$\xlongequal{独立}1-[1-F_X(z)][1-F_Y(z)]$

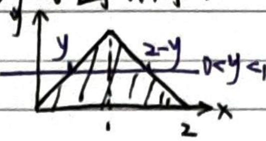
(7) 常见分布的可加性

$B(n,p)$, $P(\lambda)$, $N(\mu,\sigma^2)$, χ^2 分布

$Z=X\pm Y=N(\mu_1\pm\mu_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2)$

均匀

例3.3.5 已知二维随机变量(X,Y)在G上服从均匀分布，G由 $x-y=0$，$x+y=2$ 与 $y=0$ 围成，求：



(1) 边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$

(2) 条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$

解：(1) 易知 $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\in G\\ 0, & 其他\end{cases}$ 则 $f_X(x)=\begin{cases}\int_0^x dy, & 0<x<1 \sim x\\ \int_0^{2-x} dy, & 1<x<2 \sim 2-x\\ 0, & 其他.\end{cases}$

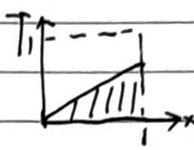
由联合求边缘.

~~积限先定限，限内画个线~~.

$f_Y(y)=\begin{cases}\int_y^{2-y} dx, & 0<y<1 \sim 2-2y\\ 0, & 其他\end{cases}$ → $y\in(0,1)$时，x的范围

(2) $f_{X|Y}(x|y)=\begin{cases}\dfrac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\dfrac{1}{2-2y} & (0<y<1)\\ =0, & 其他.\end{cases}$

3.3.10、概率密度 $f(x,y)=\begin{cases}2-x-y, & 0<x<1, 0<y<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

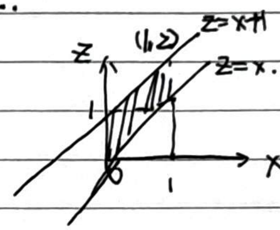


(1) 求 $P\{X>2Y\}$

(2) 求 $Z=X+Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ → 公式法(讨论z范围). → 分布函数法

解：(1) $P\{X>2Y\}=\iint_{x>2y} f(x,y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{\frac{x}{2}}(2-x-y)\,dy=$ ___.

(2) $f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,z-x)\,dx$ 讨论被积函数



其中 $f(x,z-x)=\begin{cases}2-z, & 0<x<1, 0<z-x<1\\ 0, & 其他.\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}z<0, & f_Z=0.\\ z\in(0,1), & f_Z=\int_0^z(2-z)\,dx=z(2-z).\\ z\in(1,2), & f_Z=\int_{z-1}^1(2-z)\,dx=x(2-z)\Big|_{z-1}^1=(2-z)-(z-1)(2-z)=(2-z)\cdot(2-z)=(2-z)^2\end{cases}$

写 f_Z

3.3.11. 设随机变量X，$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，在给定 $X=i$ 条件下，$Y\sim U(0,i)$ $(i=1,2)$. 求 $F_Y(y)$ 和 $f_Y(y)$.

解：$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{Y\le y|X=1\}\cdot P\{X=1\}+P\{Y\le y|X=2\}P\{X=2\}$
$=\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=1\}+\frac{1}{2}P\{Y\le y|X=2\}$.

1° 当 $y<0$，$F_Y(y)=0$

2° 当 $y\in(0,1)$，$F_Y(y)=\frac{y}{2}$

3° 当 $y\in(1,2)$，$F_Y(y)=\frac{1}{2}+\frac{y}{4}$

4° 当 $y>2$时，$F_Y(y)=1$.

$f_Y(y)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & 0<y<1\\ \frac{1}{4}, & 1<y<2\\ 0, & 其他\end{cases}$

好多纸

基础知识结构

- 一维随机变量的数字特征
  - 数学期望
    - 概念
    - 性质
  - 方差、标准差
    - 概念
    - 性质
  - 切比雪夫不等式
- 二维随机变量的数字特征
  - 数学期望
  - 协方差与相关系数
    - 概念
    - 性质
- 独立性与相关性的判定
  - 用分布判定独立性
  - 用数字特征判定相关性

第四讲 随机变量的数字特征.

一、一维随机变量的数字特征.

1、期望 EX.

(1) 离散型 $EX=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$

$E[g(x)]=\sum_{i=1}^{\infty}g(x_i)p_i$

(2) 连续型 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx$

$E[g(x)]=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x)f(x)dx$

2. 性质(期望).

(1) $E(\sum_{i=1}^{n}a_iX_i)=\sum_{i=1}^{n}a_iEX_i$

$Ec=c$, $E(aX+b)=aEX+b$, $E(X\pm Y)=EX\pm EY$

(2) 若 X 与 Y 独立.

$E(XY)=EX\cdot EY$, $E[g_1(X)\cdot g_2(Y)]=E[g_1(X)]E[g_2(Y)]$

3. 方差 DX.

(1) 定义: $DX=E[(X-EX)^2]=E(X^2)-(EX)^2$

标准差 $\sigma(X)=\sqrt{DX}$.

标准化随机变量 $X=\frac{X-EX}{\sqrt{DX}}$.

(2) 性质.

① $DX\geq 0$, $E(X^2)=DX+(EX)^2\geq(EX)^2$

② $Dc=0$.

③ $D(aX+b)=a^2DX$

④ $D(X\pm Y)=DX+DY\pm 2Cov(X,Y)$

⑤ 若 X 与 Y 独立, $D(aX+bY)=a^2DX+b^2DY$

4. 切比雪夫不等式. $DX\downarrow$, $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\uparrow$, 描述 X 的"分散程度"

$\forall\varepsilon>0$, 有 $P\{|X-EX|\geq\varepsilon\}\leq\frac{DX}{\varepsilon^2}$ 或 $P\{|X-EX|<\varepsilon\}\geq 1-\frac{DX}{\varepsilon^2}$

5. 常用期望与方差. 背记

	E	D
0-1分布 $B(1,p)$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n,p)$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $P(\lambda)$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a,b)$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$

二、二维随机变量的数字特征

1、期望 E

(1) 离散 $E[g(X,Y)]=\sum_i\sum_j g(x_i,y_j)p_{ij}$

(2) 连续 $E[g(X,Y)]=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}g(x,y)f(x,y)dxdy$

2. 协方差与相关系数.

(1) 定义: 协方差 $Cov(X,Y)=E[(X-EX)(Y-EY)]=E(XY)-EX\cdot EY$

相关系数 $\rho_{XY}=\frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{DX}\cdot\sqrt{DY}}$

注: $E(XY)=\begin{cases}\sum\limits_i\sum\limits_j x_iy_jP_{ij} & (离散) \\ \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}xyf(x,y)dxdy, & (连续型)\end{cases}$

(2) 性质

① 对称性 $Cov(X,Y)=Cov(Y,X)$, $\rho_{XY}=\rho_{YX}$

$Cov(X,X)=DX$, $\rho_{XX}=1$

② 线性性 $Cov(X,C)=0$, $Cov(aX+b,Y)=aCov(X,Y)$

$Cov(X_1+X_2,Y)=Cov(X_1,Y)+Cov(X_2,Y)$ 可加性.

③ $|\rho_{XY}|\le 1$

④ 若 $Y=aX+b$, 则 $\rho_{XY}=\begin{cases}1, & a>0 \\ -1, & a<0\end{cases}$

30题: 3.4.7、例3.4.14. $\begin{cases}独立一定不相关 \\ 不相关不一定独立.\end{cases}$ P503.

第5讲 大数定律与中心极限定律.

1. 依概率收敛

$\lim_{n\to\infty} P\{|X_n - X|<\varepsilon\}=1$，$\lim_{n\to\infty} X_n = X(P)$ 或 $X_n \xrightarrow{P} X\ (n\to\infty)$

2. 大数定律

①切氏 ②伯氏 ③辛氏 P509. 记条件

①切氏：$\{X_n\}$独立，$DX\le C$.

②辛氏：$\{X_n\}$独立同分布，EX存在

注：$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{P} E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i)$

$\bar{X} \xrightarrow{P} E\bar{X}$

3. 中心极限定理.

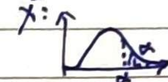
X_n独立同分布于 $F(\mu,\sigma^2)$，则 $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$.

标准化 $\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1)$

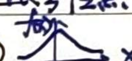
条件：$\{X_n\}$独立同分布，且EX、DX均存在.

第6讲 数理统计初步

1、三大分布.



(1) χ^2分布：$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立$\sim N(0,1)$. $X=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$ 上α分位点，$S=\alpha$.



(2) t分布：$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，X与Y独立. $t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$.

(3) F分布：$X\sim\chi^2(n_1)$，$Y\sim\chi^2(n_2)$，X与Y独立，$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

1、三大分布

(1) χ^2分布：$X_1,X_2,X_3,\cdots X_n \sim N(0,1)$.

$X=\sum_{i=1}^{n} X_i^2 \sim \chi^2(n)$. 一般要先将$X_i$标准化. $\frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

① 若$X_1\sim\chi^2(n_1)$，$X_2\sim\chi^2(n_2)$，X_1与X_2独立，则$X_1+X_2\sim\chi^2(n_1+n_2)$ $\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\mu}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n)$.

② 若$X\sim\chi^2(n)$，则$EX=n$，$DX=2n$.

(2) t分布. 形似正态分布，$n\to\infty$，为正态

$X\sim N(0,1)$，$Y\sim\chi^2(n)$，$t=\frac{X}{\sqrt{Y/n}} \sim t(n)$

(3) F分布

$X\sim\chi^2(n_1)$. $Y\sim\chi^2(n_2)$，$F=\frac{X/n_1}{Y/n_2} \sim F(n_1,n_2)$

① 若$F\sim F(n_1,n_2)$，则$\frac{1}{F}\sim F(n_2,n_1)$

② $F_{1-\alpha}(n_1,n_2)=\frac{1}{F_\alpha(n_2,n_1)}$

(4) 正态总体下常用结论.

设$X_1,X_2,\cdots,X_n$是$N(\mu,\sigma^2)$的一个样本，$\bar{X}$、S^2是均值与方差.

① $\bar{X}\sim N(\mu,\frac{\sigma^2}{n})$，即 $\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$.

② $\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2 \sim \chi^2(n)$

③ $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}(\frac{X_i-\bar{X}}{\sigma})^2 \sim \chi^2(n-1)$ （②中μ未知，用$\bar{X}$代替）.

④ $\bar{X}$与S^2独立，$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}-\mu)}{S} \sim t(n-1)$ （①中σ未知，用S代替）.

$\Rightarrow \frac{n(\bar{X}-\mu)^2}{S} \sim F(1,n-1)$

2. 参数点的估计

(1) 矩估计法

① $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum X_i$

② 写 EX

③ 令 $EX=\overline{X}$

(2) 最大似然估计法

① 写出似然函数 $L(\theta)$

② 令 $\frac{dL}{d\theta}=0$ 或 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=0$，得 $\hat{\theta}$

补充：[不变性] $u=u(\theta)$ 是有单值的反函数 $\theta=\theta(u)$，则 $\hat{u}=u(\hat{\theta})$ 是 $u(\theta)$ 的最大似然估计

(3) 评价标准

① 无偏性

θ 的估计量 $\hat{\theta}$ 为一切 n 与 $\theta\in I$，有 $E\hat{\theta}=\theta$，则无偏

② 有效性（最小方差性）

若 $D(\hat{\theta}_1)<D(\hat{\theta}_2)$，则 $\hat{\theta}_1$ 比 $\hat{\theta}_2$ 有效.

③ 一致性（相合性）

$\forall\varepsilon>0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta}-\theta|<\varepsilon\}=1$，即 $\hat{\theta}\xrightarrow{P}\theta\ (n\to\infty)$，则称 $\hat{\theta}$ 为 θ 的一致相合量.

3. 参数的区间估计

(1) α：显著性水平

$1-\alpha$：置信度（置信水平）

$(\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2)$ 置信区间

置信下限　置信上限

(2) 正态分布均值的置信区间

P521，表.

基本思路 ①化为 $N(0,1)$ ② $Z_{\frac{\alpha}{2}}\le Z\le Z_{\frac{\alpha}{2}}$

$t_{\frac{\alpha}{2}} \le z\le t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$.

4. 假设检验

(1) H_0：原假设、基本假设、零假设

H_1（$H_备$）：对立假设、备择假设

判断 ∪ 显著性检验

C：否定域，拒绝 H_0 的集合.

C^*：H_0 的接受域

双边检验

单边检验（左/右）

(2) 正态总体下之大检验及拒绝域

P521 ∪ P522.

(3) 两大错误.

① 弃真. eg. 11111 $\boxed{000}$ 11 11111

② 取伪. eg 000 $\boxed{111}$ 001000101